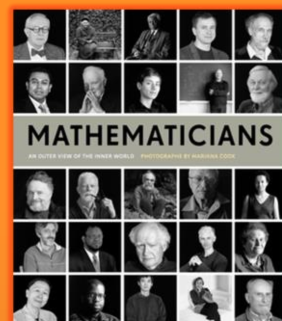
Συλλογή με Μαθηματικές εργασίες



Ανάλυση, Γεωμετρία, Νέες Τεχνολογίες κ. ά.



5 από 6 αρχεία



Γιάννης Πλατάρος



Ανθυφαίρεση Ανταναίρεση	Η Ευκλείδεια Γεωμετρία Το άπειρο	Απειροστικός Λογισμός Αντιπαράδειγμα	2015

Διδακτική Μαθηματικών

στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση.



Μεσσήνη

Η τεκμηρίωση του ορισμού της σύγκλισης ακολουθίας πραγματικών $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με αντιπροσωπευτικά παραδείγματα & αντιπαραδείγματα.

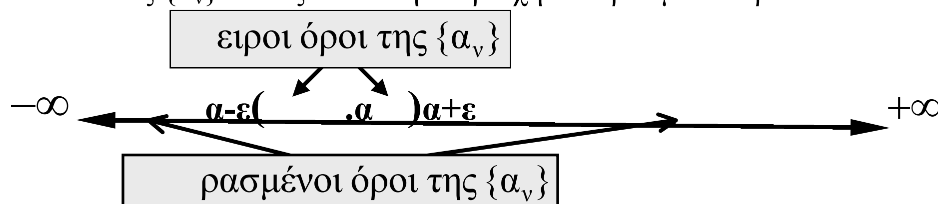
Ιωάννης Π. Πλατάρος , Μαθηματικός , Καπετάν Κρόμπα 37 , Τ.Κ. 24 200 ΜΕΣΣΗΝΗ , ηλ./ταχ. Plataros@sch.gr

Περίληψη: *Οι ακολουθίες που συγκλίνουν στον $\alpha\in\mathbb{R}$, μπορούν να διαχωριστούν σε κλάσεις ξένες μεταξύ τους με βάση τον τρόπο σύγκλισης. Όμως, μόνο ένας αντιπρόσωπος, μιας μόνο κλάσης δικαιολογεί πλήρως την γνωστή συνθήκη σύγκλισης $|\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon$, ενώ όλοι οι άλλοι, δικαιολογούν μια ασθενέστερη συνθήκη. Η ιδιότητα αυτή, καθιστά έναν τέτοιο αντιπρόσωπο απαραίτητο σε κάθε διδακτικό εγχειρίδιο Απειροστικού λογισμού. Επίσης , η παράθεση στα βιβλία ενός τουλάχιστον αντιπροσώπου από κάθε κλάση παραδειγμάτων σύγκλισης , αλλά και αντιπαραδειγμάτων σύγκλισης, εξασφαλίζει την σφαιρική παρουσίαση του ορισμού σε όλο το πλάτος και βάθος της έννοιας της σύγκλισης και αυξάνει την δυνατότητα πλήρους κατανόησης της βασικότερης έννοιας του Απειροστικού.*

Εισαγωγή: Σε μια τυπική εισαγωγή στην έννοια της σύγκλισης ακολουθίας σε πραγματικό, συνήθως παρατίθεται ο κλασσικός ορισμός :

Μία ακολουθία πραγματικών $\{\alpha_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέμε ότι συγκλίνει στον $\alpha\in\mathbb{R}$, και συμβολίζουμε με $\alpha_\nu\to\alpha$ ή $\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu=\alpha$ όταν και μόνον όταν $\forall\ \varepsilon>0 , \exists\ \nu_0\in\mathbb{N}$ *με* $\nu_0=\nu_0(\varepsilon) : |\alpha_\nu-\alpha|<\varepsilon$, $\forall\ \nu\geq\nu_0$.

Φυσικά, για να αρχίσει να γίνεται κατανοητός ο ορισμός, η γεωμετρική του μετάφραση είναι η εκ των ων ουκ άνευ προϋπόθεση [1]: «$\alpha_\nu\to\alpha\in\mathbb{R}$»$\Leftrightarrow$ «Σε κάθε περιοχή του α περιέχονται άπειροι όροι της ακολουθίας {α$_\nu$} και έξω από την περιοχή πεπερασμένοι όροι»



Στην συνέχεια, παρατίθενται συνήθως παραδείγματα που ικανοποιούν τον ορισμό και κάπου εκεί τελειώνει η διδασκαλία της ενότητας «σύγκλιση ακολουθίας σε πραγματικό αριθμό» Όμως, τα παραδείγματα και τα αντιπαραδείγματα που θα παρατεθούν, καλό θα είναι να φροντίσουμε να είναι **ένα τουλάχιστον από κάθε κλάση** ,οι οποίες μπορούν να ορισθούν με βάση την φυσική έννοια της κατεύθυνσης σύγκλισης (από δεξιά , αριστερά ή αμφίπλευρα)

Οι κλάσεις ακολουθιών:

Οι κλάσεις που υπάρχουν με βάση τον κριτήριο «κατεύθυνση σύγκλισης» που θέσαμε , είναι οι παρακάτω [2] :

Συγκλίνουσες Ακολουθίες πραγματικών αριθμών στον α $\in \mathbb{R}$				
Κλάση	**Πλήθος όρων <α**	**Πλήθος όρων=α**	**Πλήθος όρων>α**	**Εκπλήρωση ασθενέστερης συνθήκης από την | $α_ν$-α | <ε , $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$**
[$Π_1$]	πεπ/νο	πεπ/νο	πεπ/νο	Δεν τις εξετάζει ο Απ/κός Λογισμός
[$Π_2$]	∞	πεπ/νο	πεπ/νο	$0 < \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[$Π_3$]	πεπ/νο	∞	πεπ/νο	$0 = \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[$Π_4$]	πεπ/νο	πεπ/νο	∞	$0 < \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[$Π_5$]	∞	∞	πεπ/νο	$0 \leq \alpha - \alpha_\nu < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[$Π_6$]	∞	πεπ/νο	∞	$0 < \|\alpha_\nu - \alpha\| < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[$Π_7$]	πεπ/νο	∞	∞	$0 \leq \alpha_\nu - \alpha < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$
[$Π_8$]	∞	∞	∞	$\|\alpha_\nu - \alpha\| < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$

Από τον πίνακα μπορούμε να παρατηρήσουμε ή και να αποδείξουμε τα εξής:

i. Οι κλάσεις $Π_2$-$Π_8$ είναι ξένες μεταξύ τους και κάθε μία έχει άπειρους αντιπροσώπους.
ii. Όλες , πλην της τελευταίας, πληρούν ασθενέστερη συνθήκη από την $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$, $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ που απαιτεί ο ορισμός της σύγκλισης.
iii. Κάθε παράδειγμα συγκλίνουσας ακολουθίας στον α $\in \mathbb{R}$ είναι αντιπρόσωπος μίας και μόνον από αυτές τις κλάσεις.

iv. Αν ανατρέξουμε στην προσωπική μας εμπειρία, μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι τα εμφανιζόμενα παραδείγματα στα εγχειρίδια Απειροστικού Λογισμού, κατά σειρά φθίνουσας συχνότητας εμφάνισης , ακολουθούν **περίπου** την διάταξη του πίνακα από $Π_2$-$Π_8$.

Το βέβαιον είναι ότι αντιπρόσωπος της κλάσης $Π_8$ απαντάται σπανιότατα έως καθόλου. Όμως, **μόνο ένας αντιπρόσωπος της κλάσης $Π_8$ μπορεί να δικαιολογήσει πλήρως τον ορισμό της σύγκλισης**, αφού οι αντιπρόσωποι όλων των άλλων κλάσεων, πληρούν ασθενέστερη συνθήκη . Το δε σύνολο όλων των παραδειγμάτων πλην της $Π_8$, πληροί μια **διάζευξη** των ασθενεστέρων συνθηκών , **που κι αυτή είναι μια ασθενέστερη συνθήκη από την** $|\alpha_\nu - \alpha| < \varepsilon$ **,** $\forall \nu \geq \nu_0(\varepsilon)$ **.**

Επίσης η παράθεση **αντιπαραδειγμάτων** σύγκλισης, θεωρείται ως εξαιρετικά αναγκαία πράξη, αφού από τα συνήθη παραδείγματα, υπάρχει ο γνωστός κίνδυνος να θεωρήσει ο μαθητής ότι υπάρχουν μόνο συγκλίνουσες ακολουθίες σε $\alpha \in \mathbb{R}$ και το πολύ κάποιες που συγκλίνουν στο $-\infty$ $+\infty$ ή $-\infty$. Όμως ολόκληρη η εικόνα είναι η παρακάτω:

ΜΗ Συγκλίνουσες Ακολουθίες πραγματικών αριθμών.		
Κλάση		**Πλήθος οριακών αριθμών**
$[A_1]$	$[A_1^1]$	Πεπερασμένο ≥ 2 και όλοι πραγματικοί
	$[A_1^2]$	Άπειρο και όλοι πραγματικοί
$[A_2]$		Μοναδικός το $+\infty$
$[A_3]$		Μοναδικός, το $-\infty$
$[A_4]$		Τουλάχιστον δύο , με ένα το $+\infty$ είτε το $-\infty$

Πάλι επικαλούμενοι την κοινή εμπειρία , μπορούμε να παρατηρήσουμε , ότι οι κλάσεις A_1 και A_4 είναι οι πλέον σπάνιες σε εμφάνιση στα βιβλία. Έτσι η ανάγκη πληρότητας των παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων σύγκλισης φαίνεται και εδώ. Στην συνέχεια παραθέτουμε χαρακτηριστικούς αντιπροσώπους, από όλες τις κλάσεις σύγκλισης και μη σύγκλισης:

Το αντιπαράδειγμα, ως θεραπεία συνήθων λαθών στα Μαθηματικά

Γιάννης Π. Πλατάρος
M.Edu. στη διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
Δ/ντης 1[ου] ΓΕΛ Μεσσήνης
Ηλ.ταχ. Plataros@sch.gr

Πρόλογος : Το αντιπαράδειγμα, είναι μια αρχαία αποδεικτική μέθοδος . Ουσιαστικά πρόκειται για ειδική περίπτωση της εις άτοπον απαγωγής . Παρ΄ ότι επικαλύπτεται από την αποδεικτική μέθοδο της εις άτοπον απαγωγής, δεν σημαίνει ότι θα πρέπει να απουσιάζει από τα διδακτικά εγχειρίδια (όχι μόνο των μαθηματικών) της Δ/βάθμιας Εκ/σης έστω και ως νύξη ή ως λέξη, όπως συμβαίνει τώρα. Σε κάθε περίπτωση όμως , μπορεί και πρέπει να χρησιμοποιείται έστω και σιωπηρώς ή αφανώς.

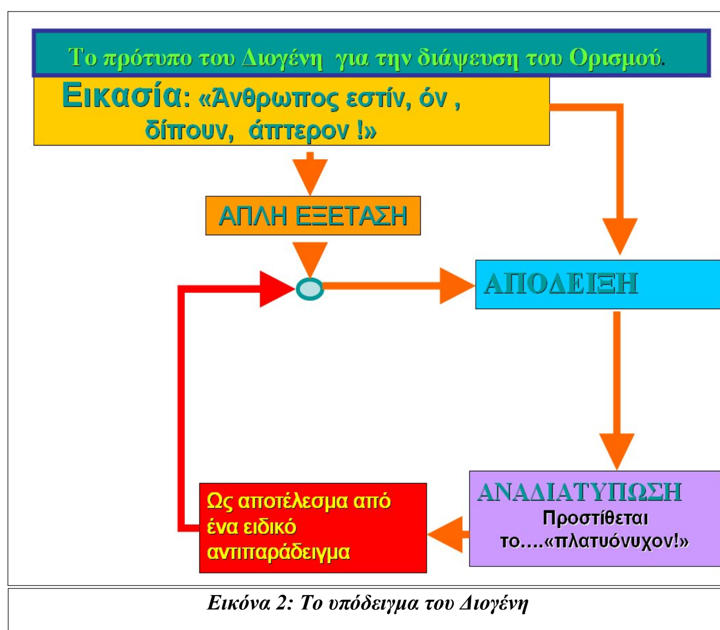
Ο μαθηματικός ορισμός του αντιπαραδείγματος : Εάν θέλουμε να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\forall x : P(x)$» είναι ψευδής, πρέπει κι αρκεί να αποδείξουμε ότι η πρόταση «$\exists x : \neg P(x)$» είναι αληθής. Δηλαδή , πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο χ_0 του σχετικού συνόλου αναφοράς έτσι ώστε η $P(\chi_0)$ να είναι ψευδής. Το χ_0 θα λέγεται τότε **αντιπαράδειγμα** στην πρόταση «$\forall x : P(x)$»

Λ.χ. η πρόταση: *«Ένα κοράκι που δεν ήταν μαύρο παρατηρήθηκε στην θέση χ την ώρα t»* , συνιστά αντιπαράδειγμα στην πρόταση *«Όλα τα κοράκια είναι μαύρα»*

Ένα αρχαίο αντιπαράδειγμα σε ορισμό: Ο Διογένης ο Λαέρτιος, διασώζει ένα ανέκδοτο με τον Διογένη τον κυνικό, όπου όπως γράφει: «…Pl£twnoj Ðrisamšnou, ”AnqrwpÒj ™sti zùon d…poun ¥pteron, kaˆ eÙdokimoàntoj, t…laj ¢lektruÒna e„s»negken aÙtÕn e„j t¾n scol¾n ka… fhsin, « oátÒj ™stin Ð Pl£twnoj ¥nqrwpoj» Óqen tù ÓrJ prosetšqh tÕ platuènucon…»


Εικόνα 1: Το ζωντανό αντιπαράδειγμα του Διογένη του Κυνικού

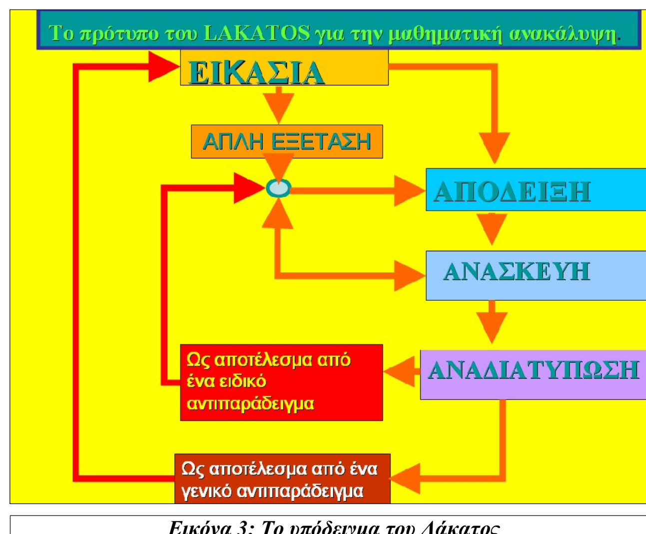
Ο παραπάνω ορισμός επιδέχεται ως αντιπαράδειγμα τον ξεπουπουλιασμένο κόκορα της διπλανής φωτογραφίας. Αυτό επιφανειακά, διότι κατά βάθος, αυτή είναι και η δομή της μαθηματικής ανακάλυψης (κατά τον Λάκατος) που διαγραμματικά , μπορεί να παρασταθεί από το παρακάτω σχήμα: Ο αρχικός ορισμός αποτελεί μια εικασία ορισμού, γίνεται απλή εξέταση και φαίνεται σωστός, όμως ένα ειδικό αντιπαράδειγμα τον διαψεύδει , αναθεωρείται, προστίθεται το πλατυόνυχον για να αναθεωρηθεί κι αυτό στο μέλλον, αφού και ο γορίλλας είναι πλατυόνυχος! (δεν μας διαφωτίζει περαιτέρω ο Διογένης Λαέρτιος !)



Εικόνα 2: Το υπόδειγμα του Διογένη

Η εικόνα 3 , δείχνει το πλήρες υπόδειγμα του Λάκατος για την μαθηματική ανακάλυψη, το οποίο , απλώς είναι λεπτομερέστερο του αρχαίου υποδείγματος. Ουσιαστικά όμως, αυτό φανερώνει την κεντρική σημασία του αντιπαραδείγματος σε επιστημονικό επίπεδο.

Σε επιστημολογικό , το αντιπαράδειγμα αποτελεί τον πυρήνα της διαψευσεοκρατίας, η οποία σχηματικά μπορεί να συνοψιστεί στην φράση «επιστημονικό, είναι ό,τι είναι διαψεύσιμο» (συνήθως με αντιπαράδειγμα θα λέγαμε)



Εικόνα 3: Το υπόδειγμα του Λάκατος

<u>Η διδακτική αξία των αντιπαραδειγμάτων:</u> Κάθε μαθηματική έννοια χωρίζει τα μαθηματικά αντικείμενα στα οποία αναφέρεται σε δύο κλάσεις:

- Στην κλάση των παραδειγμάτων (examples) που την πληρούν και
- Στην κλάση των αντιπαραδειγμάτων (counterexamples ή non examples) που δεν την πληρούν.

Διδακτικά , η μη χρήση αντιπαραδειγμάτων στην διδασκαλία των μαθηματικών αφαιρεί από τον διδάσκοντα ένα μέρος της διδακτικής του ισχύος.

<u>Το αντιπαράδειγμα ως εργαλείο σε ετοιμότητα :</u> Μία συνήθης χρήση, μπορεί να είναι μια άμεση απάντηση σε λανθασμένο ορισμό. Λόγου χάριν:

Μαθητής: «Πρώτοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν ως διαιρέτες τους τον εαυτό τους και την μονάδα»

Καθηγητής: Αν είναι έτσι , και το 8 πρώτος είναι, γιατί έχει ως διαιρέτες του και το 1 και το 8 ……Με αυτό τον κανόνα, όλοι οι αριθμοί είναι πρώτοι!....

Σχόλιο: Τετριμμένο, εύκολο αντιπαράδειγμα για κάθε διδάσκοντα

Μαθητής: Για να προσθέσουμε δύο κλάσματα , προσθέτουμε τους αριθμητές τους και τους παρονομαστές τους

Καθηγητής: Αν είναι έτσι, τότε $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, ενώ όλοι ξέρουμε, ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ δηλ. μισό και μισό κάνει ένα!

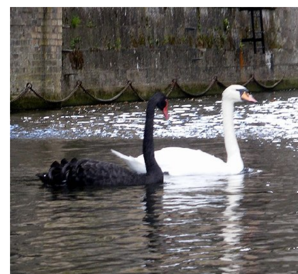
Σχόλιο: Το πιο απλό αντιπαράδειγμα της κλάσης $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{2\alpha}{2\beta}=\frac{\alpha}{\beta}$

Βεβαίως το κατά πόσον μπορεί να είναι κάποιος σε ετοιμότητα και να εξάγει επιτυχημένα αντιπαραδείγματα, είναι πιο εύκολο απ΄ ό, τι φαίνεται, διότι τα περισσότερα λάθη των μαθητών και πεπερασμένα είναι και λίγα και επαναλαμβανόμενα ανά γενιές μαθητών και συνήθη. Υπάρχουν τα γνωστά διδακτικά εμπόδια στα μαθηματικά που πηγάζουν από επιστημολογικά εμπόδια , από τα οποία τα μεν γνήσια αντιστέκονται πάρα πολύ στο να απαλειφθούν (αυτό άλλωστε δηλοί ο όρος διδακτικό εμπόδιο) κάποια όμως άλλα , μοιάζουν με τέτοια, αλλά μπορούν να ξεπεραστούν σχετικά εύκολα, με χρήση καταλλήλου παραδείγματος, το οποίο πρέπει να υπάρχει στο κάθε καλό διδακτικό βιβλίο.

<u>Μια παράπλευρη χρησιμότητα του αντιπαραδείγματος:</u> Αφανώς , εισάγεται η έννοια της απόδειξης μέσω αντιπαραδείγματος φυσιολογικά απλά και λογικά <u>πολύ πριν ομιλήσει κάποιος για την ίδια την έννοια της απόδειξης στα Μαθηματικά</u>:

Στο προηγούμενο παράδειγμα, λέει ο δάσκαλος: «Ο Κανόνας του Νίκου για την πρόσθεση κλασμάτων, δεν είναι σωστός, διότι αν δεχθούμε ότι είναι είναι σωστός ο κανόνας του, τότε θα πρέπει $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+1}{2+2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ενώ όλοι ξέρουμε, ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

Εισάγεται δηλ. μια ειδική περίπτωση της εις άτοπον απαγωγής <u>μερικά χρόνια πριν μιλήσουμε γι αυτήν.</u> Και επειδή η έννοια του αντιπαραδείγματος είναι διεπιστημονική –Λογική, μπορεί να χρησιμοποιείται παντού. Για παράδειγμα: «Είναι όλοι οι κύκνοι λευκοί;» Στο



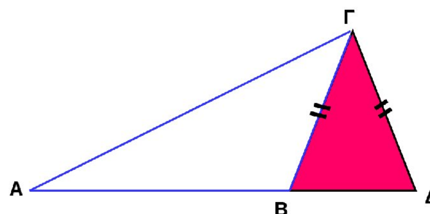
ενδεχόμενο «ναι» των παιδιών μπορεί να προσκομιστεί μια γνήσια φωτογραφία που δηλοί το λάθος και συνιστά αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό.

<u>Το σύνηθες λανθασμένο κριτήριο ισότητας τριγώνων:</u>

«Δύο τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν από δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία, και από μία γωνία τους ίση, μία προς μία.»

Εικόνα 4: Ο μαύρος κύκνος-αντιπαράδειγμα

Εδώ ο διδάσκων, πρέπει να είναι προετοιμασμένος να ανακαλέσει από την μνήμη του ή από τις σημειώσεις του (σύνηθες γαρ το λάθος) το παρακάτω γνωστό αντιπαράδειγμα , όπου προφανώς τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΔ, δεν είναι ίσα, καθώς το πρώτο είναι μέρος του δευτέρου , όμως πληρούν το λανθασμένο κριτήριο.



Εικόνα 5: το σχήμα-αντιπαράδειγμα στο «κριτήριο» ΠΠΓ

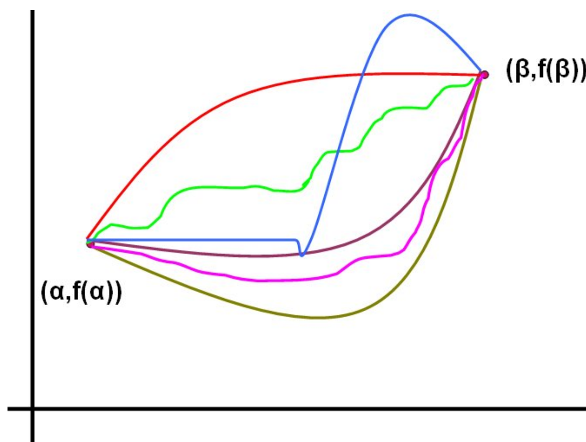
<u>Γνωστική σύγκρουση και αντιπαράδειγμα:</u>

Υπάρχει μια πρότερη (αρχαιότατη) κοινή γνώση: «Kaˆ tÕ Ólon , toà mšrouj me‹zon [εστίν]. (Η πέμπτη κοινή έννοια στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη) Έρχεται ιστορικά η νέα γνώση: Υπάρχουν άπειροι αριθμοί που ικανοποιούν την ανίσωση : (½) χ >χ. (λεκτικά: «το ήμισυ είναι μείζον του ολοκλήρου») Η επίλυση της ανίσωσης είναι αντιπαράδειγμα στην καθολική ισχύ της κοινής έννοιας του Ευκλείδη, αλλά η απλή επίλυση ή παράθεση της λύσης της ανίσωσης, **ουδόλως προκαλεί γνωστική σύγκρουση!** (Οι ίδιοι μαθητές γνωρίζουν λ.χ. ότι -2>-4 , αλλά δεν τους προκαλεί κάποια ιδιαίτερη εντύπωση.)

Πρέπει **να σχεδιαστεί καταλλήλως** η παρουσίαση: Π.χ. να πει ο διδάσκων: *«Ορισμένες ανισώσεις φαίνονται εξ αρχής ότι είναι αδύνατες! Λόγου χάριν η ανίσωση : (½) χ >χ είναι φανερό ότι είναι αδύνατη, αφού το μισό, δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το ολόκληρο! Πιθανόν δεν χρειάζεται να την επιλύσουμε, αλλά ας το κάνουμε για να βεβαιωθούμε! (Υπάρχει σχεδόν βεβαιότητα ότι θα συμφωνήσει η Β΄ Γυμνασίου) Την λύνει για βρίσκει χ<0…. Μήπως έκανα λάθος στις πράξεις; Πού έκανα λάθος; Μπορείτε να το βρείτε; …..»*

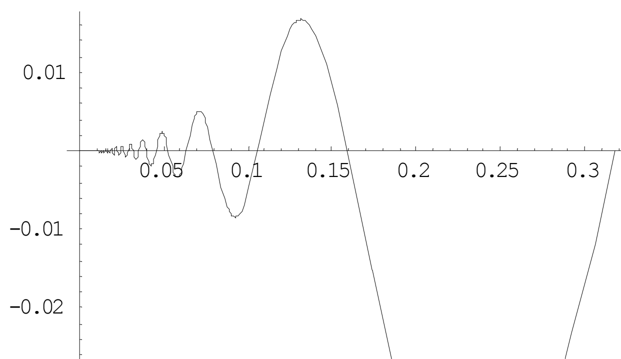
Υπάρχει όμως, ένας σοβαρός κίνδυνος: Να μην υπάρξει γνωστική σύγκρουση ή –χειρότερα- να «συγκατοικήσει» το νέο με το παλιό!

Μια ισχυρή (πλην λανθασμένη) αίσθηση και το αντιπαράδειγμα: Είναι γνωστό, ότι όπου υπεισέρχεται το άπειρο, η διαίσθηση περί ένα μαθηματικό θέμα, κινδυνεύει να διαψευστεί άρδην. Και πράγματι, στο παρακάτω θέμα, αυτό συμβαίνει. Έστω λοιπόν ότι έχουμε δύο σημεία μιας συνάρτησης και θέλουμε να τα ενώσουμε με μια «συνεχή γραμμή» Κάποιες από τις δυνατές περιπτώσεις φαίνονται στο παραδίπλα σχήμα. Όλες αυτές οι περιπτώσεις, αλλά και όλες όσες μπορεί να φανταστεί κάποιος, δημιουργούν την αίσθηση, ότι στα άκρα του [α,β] έχω θέσεις τοπικών ακροτάτων. Και η «λογική» είναι απλή :Ξεκινώντας από το (a, f(a)) Έχω τρεις δυνατές επιλογές : Ή να πάω οριζόντια («οσοδήποτε λίγο») ή να πάνω προς τα πάνω ή να πάω προς τα κάτω. Σε κάθε επιλογή μου, το σημείο (a,f(a)) αποτελεί θέση τοπικού ακροτάτου. Αυτό μου υπαγορεύεται από την κοινή Ευκλείδεια αίσθηση του τι είναι γραμμή.



Εικόνα 6: Η λανθασμένη διαίσθηση μέσω του ανωτέρω σχήματος, είναι ισχυρότατη.

Όμως το αντιπαράδειγμα της συνάρτησης $f:[0,\frac{1}{\pi}]\to\mathbb{R}$, *με* $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ καταρρίπτει αυτή την ισχυρή πλην λανθασμένη διαίσθηση, αφού εισάγει κατ΄ ουσίαν μία «παράξενη γραμμή» που «οσοδήποτε κοντά στο (0,0)» κάνει άπειρες ταλαντώσεις παίρνοντας ετερόσημες τιμές , άρα στο (0,0) δεν είναι δυνατόν να έχω θέση τοπικού ακροτάτου.



Εικόνα 7: Η «παράξενη γραμμή» του γραφήματος της f αίρει την ισχυρή πλην λανθασμένη διαίσθηση

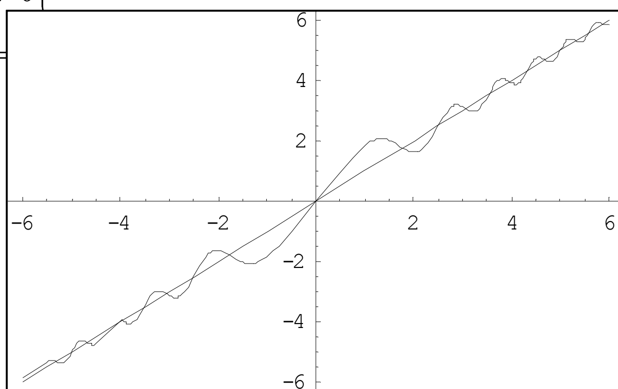
Ουσιαστικά αυτό το αντιπαράδειγμα διευρύνει την μαθηματική μας διαισθητική εμπειρία περί του τι μπορεί να είναι μια γραμμή.

Μια διαδεδομένη παρανόηση στην έννοια της ασύμπτωτης : Μια μαθηματική σχέση που ορίζει την πλάγια ασύμπτωτη ευθεία σε μια συνάρτηση, είναι η $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(\lambda x+\mu)]=0$. Όταν επιχειρείται να γίνει μια μετάφραση σε εικόνα της σχέσης, συνήθως λέγεται, ότι «η ευθεία πλησιάζει στο άπειρο οσοδήποτε κοντά το γράφημα της f(x) , χωρίς να το τέμνει.» Η ίδια η λέξη «ασύμπτωτη» παραπέμπει στην «μη σύμπτωση» , άρα στην μη τμήση του γραφήματος της f σε περιοχές του απείρου. Και η λέξη και τα συνήθως παρουσιαζόμενα παραδείγματα της έννοιας, οδηγούν την σκέψη στην μη σύμπτωση. Πρόκειται για ανάλογη (και ομοίως συνήθη) παρανόηση της έννοιας της σύγκλισης ακολουθίας, όπου η σχέση $\alpha_\nu \to \alpha$ ερμηνεύεται με το ότι «οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν οσοδήποτε κοντά στο α, χωρίς όμως και να το φθάνουν.» Μια πιθανή εξήγηση γι΄ αυτή την παρανόηση στις ακολουθίες , είναι η συχνή χρήση παραδειγμάτων σύγκλισης του τύπου $3+\frac{1}{\nu}\to 3$ ή και $3-\frac{1}{\nu}\to 3$ οι όροι των οποίων πλησιάζουν το 3 από δεξιά ή αριστερά αντιστοίχως, χωρίς όμως να το φθάνουν ποτέ ή και του τύπου $3+\frac{(-1)^\nu}{\nu}\to 3$, όπου οι όροι της ακολουθίας κάνουν «ταλάντωση» εκατέρωθεν του 3, αλλά και πάλι χωρίς να το φθάνουν ποτέ. Το παράδειγμα του τύπου $\alpha_\nu=\left\{\begin{matrix} 3-\frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu=3\kappa \\ 3 & \alpha\nu\ \nu=3\kappa+1 \\ 3+\frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu=3\kappa+2 \end{matrix}\right\}\to 3$ δηλώνει ακολουθία που οι όροι της πλησιάζουν από δεξιά και αριστερά το 3 αλλά και ταυτίζονται με αυτό. Δύο τρία παραδείγματα τέτοια σε διδακτικά βιβλία, ίσως διευκολύνουν κάποια πράγματα στην κατανόηση της πιο βασικής έννοιας του Απειροστικού όπως είναι η σύγκλιση.

Στις ασύμπτωτες των συναρτήσεων, ένα ανάλογο παράδειγμα είναι η συνάρτηση

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x}\sin x^2 & \alpha\nu\ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ x=0 \end{cases}$$

η οποία επιδέχεται ως πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία y=x Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα: η ευθεία με την f , έχουν άπειρα κοινά σημεία σε οποιαδήποτε περιοχή του θετικού ή αρνητικού απείρου. Μόνο με αυτό το παράδειγμα η κατανόηση της έννοιας της ασυμπτώτου διευρύνεται . Δυστυχώς, φαίνεται, ότι ακόμα και η άριστη γνώση του σχετικού ορισμού καθώς και η άριστη εφαρμογή του, δεν είναι ικανές συνθήκες να προσεγγίσει κάποιος όλες τις περιπτώσεις εφαρμογής μιας έννοιας σε διαισθητικό επίπεδο. Αυτό βέβαια, αποτελεί μια επανανακάλυψη μιας γενικότερης διαπίστωσης, που λέει ότι «πάντα, τα περιθώρια της εις βάθος κατανόησης μιας έννοιας , ακόμα και απλής, δεν εξαντλούνται εύκολα»



Ο ρόλος των «συνήθων λαθών» σε σχέση με τα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα: Θεωρητικώς, οι δυνητικά λανθασμένες απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις περί τα μαθηματικά, συνιστούν ένα σύνολο πολύ μεγάλου πληθικού αριθμού . Στη πραγματικότητα, οι λανθασμένες απαντήσεις, είναι **εξαιρετικά περιορισμένες σε αριθμό** και μάλιστα **επαναλαμβάνονται επιμόνως** από πολλές γενιές μαθητών. Σχεδόν όλα αυτά τα «επίμονα λάθη» αποδίδονται σε διδακτικά (ή γνωστικά) εμπόδια δηλ. σε επιστημολογικά εμπόδια.

Κατά γνώμη μας, ορισμένα από αυτά έχουν υπερεκτιμηθεί ,αφού το εμφανιζόμενο ως καθαρό επιστημολογικό εμπόδιο είναι μόνο γλωσσικό και αίρεται με κατάλληλο παράδειγμα. Το προηγούμενο θέμα με την ασύμπτωτη, ιδίως στα Ελληνικά, πράγματι αποτελεί διδακτικό εμπόδιο αφού η λέξη παραπέμπει στην μη σύμπτωση, άρα αποκλείεται να υπάρχουν κοινά σημεία συνάρτησης και ασύμπτωτης, πράγμα που όπως δείξαμε δεν συμβαίνει. Στον Αγγλόφωνο μαθητή, ο ίδιος όρος είναι «asymptote» ο οποίος ως Ελληνικός , ετυμολογικώς , δεν του λέει απολύτως τίποτα , άρα δεν αποτελεί ιδίου βαθμού διδακτικό εμπόδιο γι αυτόν (ένα μέρος του εμποδίου δεν είναι γλωσσικό)

Οι διδακτικά σπουδαίες ιδιότητες της συνάρτησης του Dirichlet : Πρόκειται για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \\ -1 & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \end{cases}$ αυτή η συνάρτηση:

- Ιστορικά, όταν τέθηκε στην μαθηματική κοινότητα, στάθηκε αιτία της διεύρυνσης του ατελούς μέχρι τότε (1837) ορισμού της συνάρτησης σε έναν πιο τέλειο (ότι δηλ. είναι μια «αυθαίρετη» μονοσήμαντη αντιστοιχία) πριν φθάσει στον σύγχρονο ορισμό που έγινε από τον Hausdorff to 1914 με την χρήση της έννοιας του διατεταγμένου ζεύγους .
- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης που ορίζετο χωρίς κάποια συγκεκριμένη αναλυτική έκφραση.
- Ήταν το πρώτο ιστορικό παράδειγμα συνάρτησης ασυνεχούς σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και σε κάθε περιορισμό του.

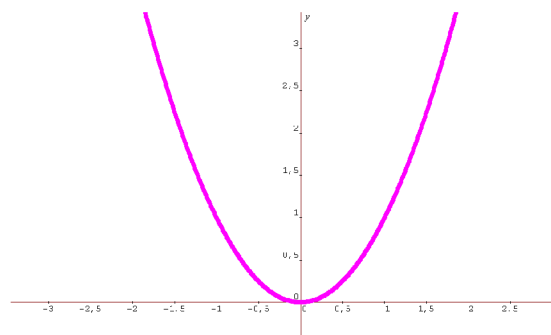
Και βεβαίως οι «παράξενες ιδιότητες της συγκεκριμένης συνάρτησης δεν εξαντλούνται εδώ. Το ενδιαφέρον όμως είναι, ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση , δείχνει την ίδια την εξέλιξη της έννοιας , ακριβώς όπως εξελίσσεται ένας οργανισμός βάσει του λεγόμενου «βιογενετικού νόμου» (δεχόμαστε, ότι υπάρχει ευθεία αναλογία μεταξύ εξέλιξης ενός όντος και εξέλιξης μιας έννοιας.

Έτσι, με αναλογική εφαρμογή στην Διδακτική του βιογενετικού νόμου ότι *«Η οντογένεση επαναλαμβάνει συντόμως την φυλογένεση»* και με την εισαγωγή της ως παράδειγμα σε ένα εγχειρίδιο , ο μαθητής θα κατανοήσει καλύτερα την έννοια της συνάρτησης μέσω και της συγκεκριμένης (ή όποιας άλλης τύπου Dirichlet) Ουσιαστικά –ενδεχομένως- θα προλάβει λάθη που ιστορικά γνωρίζουμε ότι έγιναν από γίγαντες της σκέψης , αφού οι διδασκόμενοι μαθητές είναι τρόπον τινά «καταδικασμένοι» να τα επαναλάβουν!

Λάθη στην έννοια «συνέχεια συνάρτησης» Στα Ελληνικά η λέξη **«συνέχεια»** (αλλά και σε άλλες γλώσσες) είναι συνυφασμένη με την έννοια της **συνεκτικότητας** (δηλ. του «μονοκόμματου») Έτσι:

Το γιατί οι ακολουθίες με τα δ ι α κ ρ ι τ ά τους σημεία είναι «συνεχείς συναρτήσεις», είναι το πρώτο γνωστικό εμπόδιο που θα αντιμετωπίσουν στο πρώτο έτος σπουδών τους στα ανώτερα Μαθηματικά οι μαθητές μας, αφού η έννοια της συνέχειας στο Λύκειο ,βάσει αναλυτικού προγράμματος σπουδών, ορίζεται μόνο για συναρτήσεις με πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων. Αυτό το εμπόδιο, προστίθεται σε άλλες συνήθεις παρανοήσεις για την συνέχεια που υπάρχουν στον μαθητικό πληθυσμό:

Πλάνη 1 : «Οι συνεχείς συναρτήσεις σχεδιάζονται με μονοκονδυλιά στο πεδίο ορισμού τους»

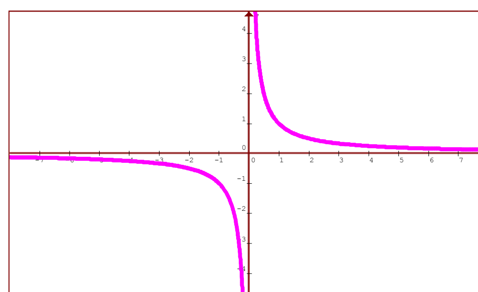


Εικόνα 8: Η τετραγωνική συνάρτηση

Αντιπαράδειγμα στην πλάνη 1: Η φ : R→R με φ(χ)= χ2 έχει άπειρο μήκος και δεν σχεδιάζεται με «μονοκονδυλιά»

Αναδιατύπωση: Πλάνη 2: «κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μήκους (:=μέτρου) γράφεται με μονοκονδυλιά»)

Αντιπαράδειγμα στην Πλάνη 2 : Έστω: $f:[-1,0)\cup(0,1]\to ¡ \;\; με \;\; f(x)=\dfrac{1}{x}$ με μ([-1,+1])=2 όπου η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της , όμως στο 0 παρουσιάζει «άπειρο πήδημα» και άρα δεν μπορεί να γραφεί με μονοκονδυλιά (πέραν του ότι έχει κι αυτή άπειρο μήκος)



Εικόνα 9: f : f(x)=1/x

Νέα αναδιατύπωση: Πλάνη 3 : «Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, γράφεται με μονοκονδυλιά»

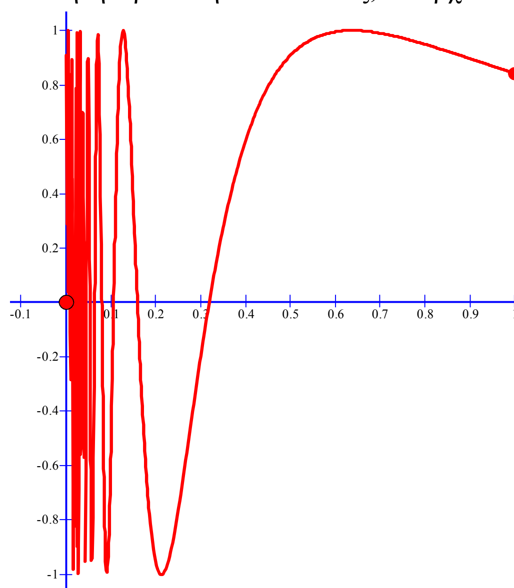
Αντιπαράδειγμα στην πλάνη 3 : Η συνάρτηση της εικόνας 9 ! Πράγματι, αποδεικνύεται, ότι δεν γράφεται με μονοκονδυλιά , αφού έχει άπειρο μήκος (η συγκεκριμένη) ή θα μπορούσε να έχει πεπερασμένο μεν, αλλά με άπειρη ταλάντωση . Επομένως, δεν μπορεί να την σχεδιάσει ικανοποιητικά , ούτε άνθρωπος ούτε Η/Υ.

Έσχατη αναδιατύπωση 4 «Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, έχει «μονοκόμματο» (:=συνεκτικό) γράφημα

Αντιπαράδειγμα: Δεν υπάρχει! Είναι σωστή η πρόταση. Εν τούτοις, υπάρχει κάτι περίεργο που διαφοροποιεί την διαισθητική (εξωμαθηματική) έννοια της «συνάρτησης που σχεδιάζεται με μονοκονδυλιά» με την έννοια της «συνάρτησης που έχει συνεκτικό - μονοκόμματο γράφημα» πρόκειται για το παράδειγμα

$$f:[0,1]\to R \;\; με \;\; f(x)=\begin{Bmatrix} \sin\dfrac{1}{x} & αν \;\; x\neq 0 \\ 0 & αν \;\; x=0 \end{Bmatrix}π$$

ου έχει ως γραφική παράσταση την συνάρτηση στην εικόνα 10. Εδώ λοιπόν ισχύει η πρόταση, ότι «Κάθε συνάρτηση που έχει συνεκτικό γράφημα σε διάστημα, δεν σημαίνει ότι είναι και συνεχής σε αυτό»



Εικόνα 10: Συνεκτικό μεν το γράφημα, πλην όμως, ασυνεχής στο 0

Συμπεράσματα –Προτάσεις: Η έννοια του αντιπαραδείγματος ως αποδεικτικού μέσου σε λανθασμένες γενικεύσεις, είναι μια διεπιστημονική έννοια που εφαρμόζεται σε όλες τις φυσικές και κοινωνικές επιστήμες, στην Λογική και στην Φιλοσοφία , ουσιαστικά σε κάθε τομέα του επιστητού. Άρα πρέπει ως έννοια και ως λέξη να εισαχθεί στα διδακτικά εγχειρίδια και όχι μόνο των Μαθηματικών. Ουσιαστικά εισάγει αφανώς μια ειδική περίπτωση της «εις άτοπον απαγωγής» και εισάγει τον μαθητή στην έννοια της απόδειξης πολύ πριν μάθει για την έννοια καθ΄ εαυτή.

Το αντιπαράδειγμα μπορεί να άρει παρανοήσεις ,να διορθώσει λανθασμένα νοητικά μοντέλα , αρκεί να δημιουργηθεί με προσοχή ο κατάλληλος διδακτικός σχεδιασμός που θα δημιουργήσει την γνωστική σύγκρουση και η διδακτική ρήξη.

Αποτελεί εργαλείο ανταπόδειξης σε λανθασμένες εικασίες, ισχυρισμούς και γενικεύσεις είτε αφορούν τα μαθηματικά είτε όχι.

Στην Επιστημολογία και μάλιστα στο κυρίαρχο ρεύμα της διαψευσεοκρατίας, έχω ότι: «Επιστημονικό» = «Το διαψεύσιμο» Δηλ. η επιστήμη προχωρά με δοκιμές και σφάλματα και

το αντιπαράδειγμα κατέχει κεντρική θέση .Για να υπάρξει αντιπαράδειγμα, προϋπάρχει κάποιο λάθος Το λάθος δεν το κάνουν πρώτοι οι μαθητές, αλλά οι επιστήμονες και μάλιστα οι μεγαλύτεροι εξ αυτών. **Αυτή μόνο η υπόμνηση , μάλλον αρκεί για να έχουμε την σωστή στάση απέναντι στα λάθη των μαθητών μας…….**

Βιβλιογραφικές και διαδικτυακές αναφορές:

Chalmers A. «Τί είναι αυτό που λέμε Επιστήμη;» Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης Ηράκλειο 2001 (σελ.57-118)

Γαγάτσης Α.«Διδακτική των Μαθηματικών» Θεωρία –Έρευνα , Θεσσαλονίκη 1995 (σελ.239-258)

Κολέζα Ε. «Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των στοιχειωδών μαθηματικών εννοιών» Αθήνα 2000 (σελ.53-62)

Πλατάρος Ι.:«Η Διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω Αντιπαραδειγμάτων» διπλωματική εργασία στο ΜΠΕ «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών» του Μαθ/κού Τμήματος του Παν. Αθηνών -2004 Διατίθεται σε: www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_plataros.pdf

Πλατάρος Ι.:«Διδακτικά εμπόδια στην έννοια της ασύμπτωτης συνάρτησης» εργασία. Διατίθεται:briefcase.pathfinder.gr/download/557157

Σπύρου Π. - Γαγάτσης Α. «Συνάρτηση: Επιστημολογική διάσταση και Διδακτική μεταφορά της» διατίθεται: http://www.math.uoa.gr/me/faculty/spirou/Spyrou%204.pdf

Η ολιστική διδασκαλία των απλών γεωμετρικών τόπων, στα πλαίσια σύγχρονων παιδαγωγικών θεωρήσεων.

Γιάννης Π. Πλατάρος
ΜΠΕ Διδακτικής και μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου
Καπετάν Κρόμπα 37 , 24200 ΜΕΣΣΗΝΗ Ηλ.Ταχ. plataros@sch.gr

Περίληψη: Η διδασκαλία των απλών γ.τ. αποτελεί το μερικό μιας Γεωμετρικής γνώσης, ενώ έννοιες , όπως των κωνικών τομών ή των δυναμικών γραμμών στην Φυσική ή σε άλλες επιστήμες, αποτελούν κάποιες επεκτάσεις ή και γενικεύσεις τους , οι οποίες όμως συνήθως παρουσιάζονται ασύνδετα και αποσπασματικά. Η εργασία προτείνει μια διδακτική επανασύνδεσή τους υπό το πρίσμα του ολισμού και παρουσίασή τους, μέσω δυναμικού λογισμικού Γεωμετρίας.

Εισαγωγή: Ο Ολισμός, είναι μια φιλοσοφική θεωρία που αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ού αι. και, στην προσπάθειά του να δώσει απάντηση στο πρόβλημα της σχέσης μεταξύ μέρους και όλου, προσέδωσε απόλυτο χαρακτήρα στο όλο.(Λεξικό Τριανταφυλλίδη) Ως σύγχρονη αντίληψη, θεωρεί ότι στα ολιστικά σχήματα, τα μέρη δεν κατανοούνται έξω από το όλον ούτε παρατηρούνται ξέχωρα απ΄ αυτό. Θεωρία του Χάους , Θεωρία της πολυπλοκότητας και Συστημική Θεωρία , αποτελούν τις αντανακλάσεις του Ολισμού στην Επιστήμη και ως θέση, είναι στον αντίποδα της τάσης για συνεχή εξειδίκευση. Στις επιστήμες, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει τις επιδράσεις της ολιστικής θεώρησης λ.χ. στην Ιατρική (Ολιστική Ιατρική) στην Οικονομία (Αειφόρος και βιώσιμη ανάπτυξη) Βιολογία και επιστήμη περιβάλλοντος (Θεωρία Γαίας) κ.ά.

Στην διδακτική των επιστημών , ο ολισμός, εμφανίζεται με την προαγωγή του διεπιστημονικού χαρακτήρα της γνώσης και της διαθεματικότητας στην διδασκαλία . Αλλά πολύ πριν φθάσουμε στο επίπεδο της διαθεματικότητας , θα πρέπει να προηγηθεί η όποια διδακτικά εφικτή ενοποίηση μεταξύ των ίδιων κλάδων των μαθηματικών, όπως και μεταξύ των επιπέδων διδασκαλίας του ιδίου αντικειμένου ηλικιακά, μέσω της σπειροειδούς λογικής του Αναλυτικού προγράμματος. Αυτό θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε στην παρούσα εργασία και με την βοήθεια ενός πανίσχυρου εργαλείου της δυναμικής Γεωμετρίας , εν προκειμένω του Sketchpad.

Ένα παράδειγμα γ. τόπου: Η μεσοκάθετος είναι χαρακτηριστικό, όσο και βασικό απλό παράδειγμα διαχρονικής διδασκαλίας, καθώς διδάσκεται στην Α΄ γυμνασίου αλλά και Α΄ Λυκείου. Συνήθως, διδάσκεται η μεσοκάθετος, μόνο ως το σύνολο των σημείων με την γνωστή ιδιότητα – ισότητα , καθώς και η μοναδικότητά της (αντίστροφο):

Τι συνήθως δεν διδάσκεται:

1)Η ανάδειξη του ευρύτερου , ότι δηλ. η μεσοκάθετος χωρίζει το επίπεδο σε τρεις κλάσεις σημείων . Των ισαπεχόντων από τα άκρα του ευθ. τμήματος που είναι η ίδια η μεσοκάθετος, του δεξιού ημιεπιπέδου, όπου όλα τα σημεία του (πλην της μεσοκαθέτου) έχουν την ιδιότητα να απέχουν περισσότερο από το άκρο που δεν ανήκει σε αυτό και του αριστερού ημιεπιπέδου με την ανάλογη ιδιότητα. Εξυπακούεται, ότι αυτή η θεώρηση, παρασύρει και τους άλλους απλούς γεωμετρικούς τόπους σε αυτή την διδασκαλία

α)Το τόξο κύκλου που χωρίζει τα σημεία ενός ημιεπιπέδου σε αυτά που βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα με σταθερή γωνία , στα απ΄ έξω με μικρότερη γωνία και στα εντός που βλέπουν το ευθύγραμμα τμήμα με μεγαλύτερη γωνία. (εξαιρούνται τα άκρα του ευθ.τμήματος)

β)Τα σημεία του κύκλου που απέχουν απόσταση ρ ,του εσωτερικού του κυκλικού δίσκου που απέχουν μικρότερη από ρ και του εξωτερικού του κυκλικού δίσκου που απέχουν μεγαλύτερη από ρ .

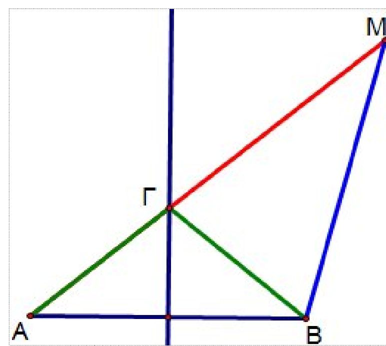
γ) Την έννοια της λωρίδας δύο ευθειών που χωρίζει κι αυτή τα σημεία του επιπέδου σε σχέση με την μεσοπαράλληλο σε τρεις τόπους .

δ) Την διχοτόμο γωνίας που κι αυτή χωρίζει την γωνία σε τρεις τόπους.

2) Δεν μνημονεύεται συνήθως η γενίκευση του μεσοκαθέτου επιπέδου για τον χώρο.(Αυτό έχει και σχέση με την –ουσιαστικά- μη διδασκαλία της στερεομετρίας στο Λύκειο)

3) Κατά την διδασκαλία της υπερβολής, συνήθως δεν αναδεικνύεται ότι αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της μεσοκαθέτου, αφού η «σταθερή διαφορά απόστασης από δύο δεδομένα σημεία» είναι μηδέν για την μεσοκάθετη και διάφορη του μηδενός για τις διπλές καμπύλες –υπερβολές.

4) Η σχεδίαση ομοειδών γεωμετρικών τόπων στο επίπεδο, είναι πλέον εύκολη υπόθεση με τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά και αυτή η ευκολία, μπορεί να αναδείξει έννοιες με τις οποίες συνήθως έρχεται σε επαφή ο μαθητής είτε πολύ αργότερα, είτε μέσω άλλων επιστημών. Τέτοιες έννοιες είναι οι «δυναμικές γραμμές πεδίου» (Φυσική) «Ισοβαρείς γραμμές» (Μετεωρολογία) «ισοϋψείς γραμμές» (Γεωγραφία –Γεωδαισία επιφάνειες στον χώρο) με αυτό τον τρόπο , μπορεί να αναδειχθεί καλύτερα και η

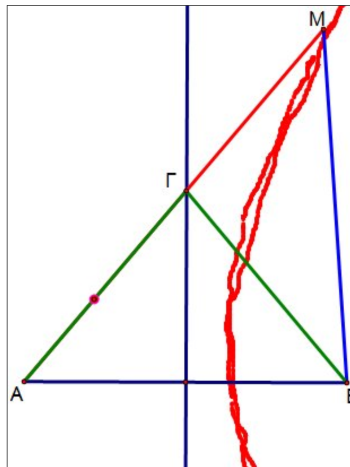


υπάρχουσα σύνδεση της Γεωμετρίας με έννοιες που είναι θεμελιώδεις για άλλες επιστήμες.

Η προσέγγιση μέσω ισο-ανισοαπεχόντων σημείων: Το παραδίπλα σχήμα του sketchpad, έχει την εξής δυναμική συμπεριφορά: Το Μ κινείται ελεύθερα στο επίπεδο και εξαρτημένα το Γ που είναι η τομή του ΜΑ και της μεσοκαθέτου. Καθώς ΓΑ=ΓΒ , καθίσταται οπτικά εμφανές ότι ΜΑ>ΜΒ μέσω της τριγωνικής ανισότητας .Σε αυτό βοηθά και η σχεδίαση των ίσων τμημάτων ΓΑ και ΓΒ με ίδιο χρώμα (κάτι που δεν φαίνεται στην παρούσα ασπρόμαυρη εκτύπωση) Καθώς το Μ πλησιάζει την μεσοκάθετο η ΜΓ ελαττώνεται και όταν το Μ συμπέσει με το Γ εξαφανίζεται (είναι σε άλλο χρώμα) . Όταν το Μ βρεθεί στο άλλο ημιεπίπεδο το Γ είναι πια σημείο τομής με την ΜΒ.

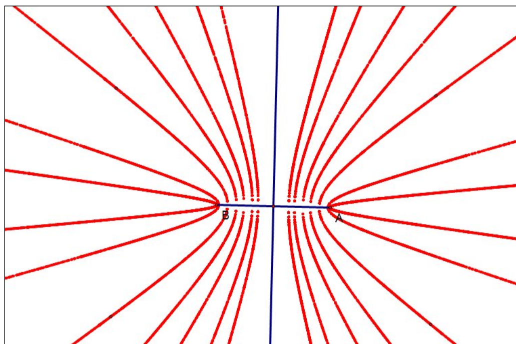
Μετάβαση στην υπερβολή μέσω της μεσοκαθέτου: Η υπερβολή ορίζεται ως ο Γ.Τ. των σημείων το επιπέδου που απέχουν σταθερή διαφορά απόστασης από δύο δεδομένα σημεία. Άρα για την περίπτωση της μηδενικής διαφοράς έχω την μεσοκάθετο και για κάθε άλλη θετική διαφορά έχω την διπλή καμπύλη όπως έχομε συνηθίσει αν και θα μπορούσαμε να ορίσουμε την θετική ή και αρνητική διαφορά μιας και ομιλούμε για αποστάσεις.

Η προσεγγιστική κατασκευή της υπερβολής, ιστορικά ήταν ένα πρακτικά δύσκολο πρόβλημα, καθώς με κανόνα και διαβήτη μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σημείο την φορά. Τώρα όμως μπορούμε να την κατασκευάσουμε με την ίδια ευκλείδειο λογική μέσω του δυναμικού γεωμετρικού εργαλείου. Πριν ο μαθητής φθάσει στην λογική τη κατασκευής της, μπορεί να μεταφέρει μέσω κύκλου το ΜΒ πάνω στο ΜΑ και να σχηματίσει έτσι την διαφορά ΜΑ-ΜΒ . στην συνέχεια μπορεί να προσπαθήσει να κινεί το Μ προσπαθώντας αυτή η διαφορά να μένει σταθερή. Τα αποτελέσματα ενός τέτοιου πειραματισμού τα βλέπουμε στο διπλανό σχήμα.



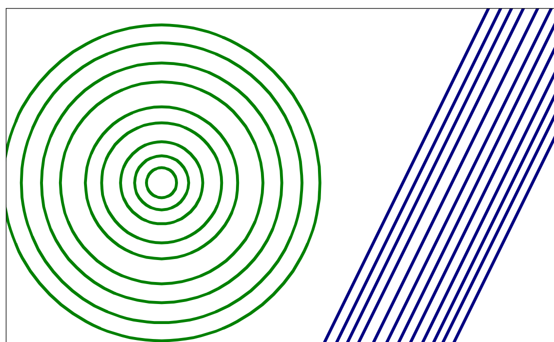
Η κατασκευή: Η δυναμική εικόνα ενός σταθερού ευθ. Τμήματος , σε μια προέκταση του οποίου κινείται σημείο, δίνει την ιδέα-έννοια της σταθερής διαφοράς αποστάσεων από τα άκρα του (υπερβολή) Στην συνέχεια, κατασκευάζοντας κατά τα γνωστά του κύκλους (Β,ΒΜ) και (Α,ΑΜ) και ορίζοντας τα σημεία τομής , έχω μια εικόνα του

τόπου που μπορώ να σχεδιάσω μεταβάλλοντας το ελεύθερο σημείο. Μετά μπορώ να ορίσω και το συμμετρικό του ως προς την μεσοκάθετο. Δεν τελειώνει όμως εκεί η διαπραγμάτευση, καθώς μπορώ να σχεδιάσω εύκολα πολλές υπερβολές για διάφορες αποστάσεις και να πάρω εικόνες όπως η παραπάνω. Στην προσπάθεια κατασκευής όλο και μεγαλύτερης διαφοράς , ο μαθητής θα διαπιστώσει, ότι θα εξαφανιστούν τα σημεία τομής των κύκλων και θα κληθεί να το ερμηνεύσει (τριγωνική ανισότητα) Αν μάλιστα ερωτηθεί για το τι του θυμίζει αυτή η εικόνα από άλλα μαθήματα, πιθανότατα θα απαντήσει , «τις δυναμικές γραμμές των πεδίων στην Φυσική». Εδώ μπορούμε να τις ονομάσουμε ως «καμπύλες ίσων διαφορών αποστάσεων» από τα δύο σημεία.



Η σύνδεση που μπορεί να γίνει είναι :

i) Με τις εικόνες δυναμικών γραμμών ή επιφανειών πεδίων της φυσικής και με τους ορισμούς: ισοϋψείς, ισοβαρείς γραμμές (ο γ.τ. των σημείων χώρου ή επιπέδου με μια συγκεκριμένη κοινή ιδιότητα)

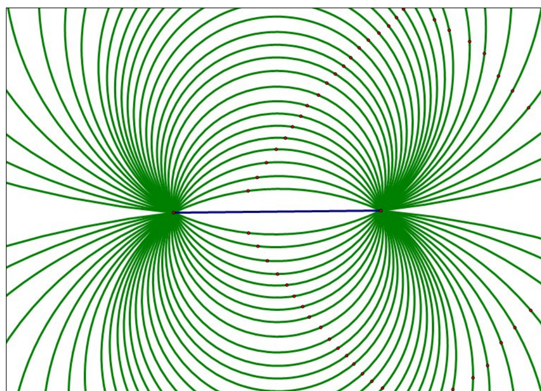


ii) Με την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής που έχει ένα σημείο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές γραμμές.

iii) Με την εξήγηση γιατί δύο τέτοιες γραμμές δεν είναι δυνατόν να τέμνονται (Χρήση της εις άτοπον απαγωγής : «Αν ετέμνοντο , το σημείο τομής θα είχε δύο διαφορετικές αντιφατικές ιδιότητες»)

iu) Με την επισήμανση , ότι και οι ευθείες των τετραδίων μας είναι οι «ισοαποστασιακές» μιας ευθείας που μπορούμε να λάβουμε ως ευθεία αναφοράς και ότι οι ομόκεντροι κύκλοι είναι οι «ισοαποστασιακές» από το κοινό κέντρο του κύκλου.

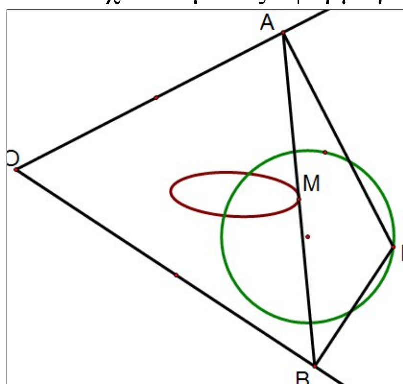
u) Με την ανάδειξη του παρακάτω σχήματος το οποίο επισημαίνει και αισθητοποιεί τα σημεία του επιπέδου που βλέπουν σταθερό



ευθ. Τμήμα με σταθερές γωνίες.
Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο δυναμικός χειρισμός αυτών των σχημάτων, καθώς όταν το μήκος του ευθ. Τμήματος τείνει στο μηδέν, οπτικοποιούνται έννοιες ανάλογες με την έννοια «δυναμικές γραμμές σημειακού διπόλου» στην Φυσική.

Ποίοι είναι οι απλοί τόποι και ποίοι οι μη απλοί; Η απάντηση στο ερώτημα φαίνεται εύκολη, αλλά κατά την γνώμη μας, δεν είναι. Η βαριά όσο και σπουδαία μακρά ιστορική κληρονομιά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, έχει δημιουργήσει και κατεστημένες αντιλήψεις γύρω απ΄ αυτήν και είναι απολύτως λογικό. Τα τελευταία χρόνια δημιουργούνται τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά και η Γεωμετρία παύει να είναι στατική και να διδάσκεται με μια κιμωλία στον πίνακα , όπως εγίνετο επί 2.000 και πλέον χρόνια. Η γεωμετρία επαναnακαλύπτει τον χαμένο (και μάλλον αποκρυπτόμενο) πειραματικό χαρακτήρα της.[1] Η κορύφωση της χρήσης των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών (Sketchpad, Cabri , EucliDraw) γίνεται στους γ.τ. , καθώς το ίδιο το αντικείμενο , ενώ είναι φύσει δυναμικό , εδιδάσκετο στατικά , λόγω τεχνικών περιορισμών. Σε αυτά τα πλαίσια, επειδή έπρεπε και ο γ.τ., να είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη, θα έπρεπε να ήταν ή κύκλος ή ευθεία ή τμήματα των προηγουμένων. Ακόμα και προ τεσσαρακονταετίας, όπου η διδασκαλία των γ.τ. ήταν πρωτεύον εμφαντικό τμήμα του αναλυτικού προγράμματος με διδασκαλία ακόμη και του αντιστρόφου κάθε τόπου , δεν διαπραγματεύοντο στην τάξη ή στα βιβλία της εποχής θέματα με κωνικές τομές. Ακόμα και στα περιώνυμης δυσκολίας βιβλία των Ιησουϊτών , είχαμε ελάχιστες ασκήσεις γ.τ. με κωνικές τομές . Μέχρι προ ολίγων ετών (αλλά ίσως και σήμερα) επιστρατεύοντο τεχνικές με καρφάκια και σχοινάκια για να σχεδιασθεί μια έλλειψη. Τώρα για να σχεδιάσει ο μαθητής μέσω ενός δυναμικού εργαλείου, μια έλλειψη, το μόνο που πρέπει να έχει καταλάβει είναι η εικόνα ενός σημείου που κινείται ανάμεσα στα άκρα ευθυγράμμου τμήματος και επομένως έχει σταθερό άθροισμα αποστάσεων από αυτά. Αν κινείται εκτός , έχει σταθερή διαφορά από τα άκρα του (υπερβολή) Αν τεντώνω κατάλληλα ένα ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζεται από ένα σημείο σε δεδομένο λόγο, αυτός διατηρείται και επομένως είναι εύκολη η κατασκευή του Απολλώνιου κύκλου . Επειδή όμως αυτή η (ομοπαραλληλική) ιδιότητα της ευθείας δεν θεωρείται στο Λύκειο γνωστή, η σταθερότητα του λόγου μπορεί να γίνει με ένα απλό μοντέλο δύο ομοίων τριγώνων με κοινή κορυφή, με συμμεταβολή δύο ζευγών ομολόγων πλευρών, ενώ το τρίτο μένει σταθερό. Ως προέκταση των $x+y=ct$, $x-y=ct$, $x/y=ct$, έρχεται το $xy=ct$, κάτι που μπορεί να εκληφθεί από την δύναμη

σημείου ως προς κύκλο και άρα να γίνει εφικτή εύκολα λ.χ. η κατασκευή των καμπυλών του Κασίνι (G.D. Cassini 1625-1712) [3] & [5] που είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία ,έχουν σταθερό γινόμενο. Μάλιστα έχουν και ενδιαφέρουσα διερεύνηση. Δεν είναι τυχαίο, που όλα τα εγχειρίδια χρήσης και δραστηριοτήτων των δυναμικών λογισμικών, περιλαμβάνουν τέτοια θέματα γ.τ. , τα οποία κανένα παραδοσιακό διδακτικό εγχειρίδιο Λυκείου δεν τολμούσε να αγγίξει στο παρελθόν για τους αντικειμενικούς λόγους που εξηγήσαμε. Ιδίως οι μηχανισμοί αρθρωμάτων που έχουν άμεσες εφαρμογές στην Μηχανική είναι θέμα που δεν μπορούσε να προσεγγιστεί καν μέσω παραδοσιακών μεθόδων. [7] & [8] Το ίδιο αφορά θέματα γ.τ. που αφορούν κίνηση ευθύγραμου τμήματος ή γενικότερα σχήματος καθώς κινείται ένα συσχετιζόμενο κατασκευαστικά σημείο ή άλλο σχήμα με αυτό. Θέματα δηλαδή που η παραδοσιακή μελέτη άγγιζε εξαιρετικά δύσκολα (σε επίπεδο διδασκαλίας στην Δ.Ε. καθόλου) και τα οποία τώρα παράγονται μέσω απλού πειραματισμού και μάλιστα μέσω απλών σχημάτων. Για παράδειγμα έχομε τον γ.τ. του διπλανού σχήματος, όπου το Γ κινείται επί κύκλου, Α και Β οι προβολές του Γ στις πλευρές της γωνίας ΑΟΒ, και Μ το μέσον του ΑΒ. Ο γ.τ. του Μ, φαίνεται να είναι μια έλλειψη. Αν ο μαθητής ενεργοποιήσει την εντολή «σχεδίαση ίχνους ΑΒ» Τότε θα πάρει ένα οιονεί αμφίκοιλο σχήμα όπου οι θέσεις του ΑΒ θα αποτελούν τις περιβάλλουσες δύο καμπυλών που δεν μοιάζουν να είναι τόξα κύκλων. Μπορεί ακόμα να πάρει νέο σημείο Μ΄ επί του ευρεθέντος τόπου και φέρνοντας πάλι τις προβολές να βρει «τον γεωμετρικό τόπο του γεωμετρικού τόπου!» Κι αυτό μπορεί να το επαναλάβει όσες φορές θέλει. Μπορεί επομένως η Γεωμετρία να διδάσκεται μόνο με κιμωλία; Να υπενθυμίσουμε ακόμα, ότι η διαπραγμάτευση θεμάτων γ.τ. μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας, εγγενώς, δεν δίνει έμφαση ούτε στο σχήμα, ούτε βεβαίως στα οπτικά μαθηματικά [2], άρα η διαπραγμάτευση θεμάτων γ.τ. μέσω λογισμικών, ενισχύει και τους δύο κλάδους της Γεωμετρίας (Αναλυτική- Ευκλείδειο) και όχι μόνο, αφού με τις δυνατότητες που έχουν τα δυναμικά λογισμικά, συνδέουν συμμεταβαλλόμενα γεωμετρικά μεγέθη με την διαγραμματική τους απεικόνιση και με την οριακή τους συμπεριφορά, άρα και με την Ανάλυση.



Προσδοκώμενα οφέλη : Θεωρούμε, ότι με την προηγουμένη διδακτική θεώρηση και πρακτική, γίνεται μια προσπάθεια να ενοποιηθούν ασύνδετα στοιχεία των συγκεκριμένων πεδίων της Γεωμετρίας και Φυσικής που παρουσιάσαμε. Με την παράλληλη διδασκαλία της ισότητας και ανισότητας στους στοιχειώδεις τόπους, πιθανόν να διευρύνονται τα γνωστικά πλαίσια των μαθητών και προάγονται γνωστικά σχήματα μέσω αφομοίωσης και προσαρμογής. Αυτά τα νοητικά σχήματα, θα επιτρέψουν στον μαθητή να κάνει αναδιοργάνωση και εξισορρόπηση ως στοιχεία της κατανόησης, μέσω των νοητικών λειτουργιών αναγνώρισης, γενίκευσης, διάκρισης και σύνθεσης. [4] Πεδία εφαρμογής των προηγουμένων εμπεδωμένων γνώσεων και σε συνάρτηση με μελλοντικές γνώσεις που θα αποκτήσουν οι μαθητές, θα μπορούσαν να είναι η βελτίωση της ικανότητάς τους στην αναγνώριση δομών[1], [2], [6] πράγμα που αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής ανακάλυψης και όχι μόνο. Επί μέρους πεδία που συνδέονται με τα προηγούμενα, είναι η γραφική λύση εξισώσεων και ανισώσεων, η ο γραμμικός προγραμματισμός (βελτιστοποίηση) το πεδίο διευθύνσεων διαφορικής εξίσωσης , μικροοικονομικά μοντέλα (λ.χ. μεγιστοποίηση οφέλους υπό δεδομένο εισοδηματικό περιορισμό) οικογένεια καμπυλών (ορθογώνιες τροχιές) και βεβαίως ο κατάλογος δεν εξαντλείται, αφού ο χαρισματικός μαθητής ή αργότερα ο ερευνητής, θα μπορεί να κάνει εύκολα συνδέσεις με αναλογική σκέψη στα πλαίσια αναγνώρισης δομών σε ασύνδετα φαινομενικά στοιχεία , χωρίς να χάνει χρόνο ωρίμανσης με αυτοανακαλύψεις επί ασυνδέτων γνώσεων μέσω αναστοχασμού , αλλά πολλές απ΄ αυτές, να έχουν συνδεθεί κατά ένα σημαντικό μέρος στην τρέχουσα διδασκαλία του προγράμματος σπουδών του , μέσω της ολιστικής , προσέγγισης της γνώσης και έτσι, ο μελλοντικός επιστήμονας , να έχει ένα σημαντικό προβάδισμα στην εμπέδωση αλλά και στην ανακάλυψη νέας γνώσης.

Βιβλιογραφικές & διαδικτυακές αναφορές:

[1] Νεγρεπόντης Σ. Νοέμβριος 2004 «Συζήτηση με τον καθηγητή Στέλιο Νεγρεπόντη» Περιοδικό *«Το Φ»* Τεύχος 1 , σελ. 97-112

[2] Λυγερός Ν. Νοέμβριος 2005 «Οπτικά Μαθηματικά» Πρακτικά συνεδρίου ΕΜΕ Λαμίας.σελ.155-159

[3] Παντελίδης Γ.-Κραββαρίτης Χ. Λεξικό Μαθηματικών , λήμμα «Γεωμετρικός τόπος»

[4] Κλαουδάτος Ν. Σημειώσεις μετ/κου μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών» Αθήνα 2004

[5] http://new.math.uiuc.edu/eggmath/Shape/cassini.html

[6] http://www.lygeros.org/2489-gr.htm
[7] http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/gGallery/Gallery.html
[8]http://www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/Maths_Pages/SketchPad_Files/Mechanical_Linkages/Mechanical_Linkages.html
Abstract : The teaching of simple geometrical locus constitutes a part of one Geometric knowledge, while significances, as the conic sections or the dynamic lines in the Physics or in other sciences, constitute certain extensions or even their generalisations, that however usually are presented incohesively and fragmentarily. The work proposes their instructive reconnection in the light holism and their presentation, via a dynamic software of Geometry.

Πέντε Θεολογικά ερωτήματα και αντίστοιχες προσπάθειες απάντησης με μαθηματικά εργαλεία.

Ιωάννης Π. Πλατάρος , μετ.φοιτητής στο Παν. Αθηνών στο Μ.Π.Σ. «Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών»
Δ/ση: Καπετάν Κρόμπα 37 , Τ.Κ. 24 200 Μεσσήνη .

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: *Σε όλες τις θρησκείες ο Θεός είναι άπειρος. Η κατανόησή του, αν είναι εφικτή, περνά μέσα από την κατανόηση του απείρου. Η διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του απείρου , ιστορικά οδήγησε σε λάθη παρανοήσεις , παράξοζα και γόνιμες αντιπαραθέσεις. Σήμερα τα μαθηματικά έχουν διεισδύσει στην έννοια του άπειρου πάρα πολύ και μπορεί εξ αυτού να εμπλουτισθεί και ο φιλοσοφικός και ο Θεολογικός στοχασμός. Επίσης η μαθηματική Λογική έχει άρει πλέον κάποια παράδοξά της. Με τέτοια εφόδια , μπορούμε να προσεγγίσουμε ερωτήματα όπως τα παρακάτω: Μπορεί ο Θεός που είναι άπειρη οντότητα να κατασκευάσει άλλες άπειρες οντότητες; Αφού είναι παντοδύναμος , μπορεί να κατασκευάσει μια πέτρα που να μην μπορεί να σηκώσει; Η έννοια «Θεάνθρωπος» που αποδίδεται στον Ιησού μήπως είναι αντιφατική; Μπορούσε άραγε ο Θεός να φτιάξει έναν καλύτερο κόσμο απ' αυτόν με τους πολέμους την πείνα και την αδικία που έφτιαξε;(Απ. : `Οχι σύμφωνα με τον Leibniz !) Η πίστη στον Θεό από έναν άνθρωπο και η ταυτόχρονη παραβατικότητά του μέσω αμαρτιών μήπως συνιστά το άρον άωτον της ανθρώπινης ανοησίας; Αυτά τα ερωτήματα διερευνά η παρούσα εργασία στα οποία προσπαθεί είτε δώσει απαντήσεις είτε να διευρύνει το πεδίο αναφοράς τους.*

Παραθέτουμε τα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν:

ΕΡΩΤΗΜΑ 1. **Ο Θεός ως άπειρη οντότητα , μπορεί να είναι κατασκευαστής άπειρης οντότητας;**

Απάντηση:

Οι στοχαστές του Μεσαίωνα ήταν ιδιαίτερα επιφυλακτικοί στο ανωτέρω ερώτημα , αφού η έννοια του απείρου εκείνη την εποχή ήταν ακόμα περιορισμένη. Δεν είχε γίνει κατανοητό ότι υπάρχουν άπειρες οντότητες οι οποίες περιέχουν άλλες, «απείρως άπειρες», οντότητες!

Για παράδειγμα σήμερα ξέρουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί περιέχονται στο διάστημα (0,1) είναι περισσότεροι[1] από όσους περιέχει το σύνολο των φυσικών $\mathbb{N}$.Κι όχι μόνο περισσότεροι από όσους έχει το $\mathbb{N}$, αλλά περισσότεροι κι από το σύνολο των φυσικών $\mathbb{Z}$, περισσότεροι κι απ' όσους έχει το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$[2] ,

[1] «Περισσότεροι» υπό την έννοια ότι **δεν** είναι «αριθμήσιμοι» δηλ**. δεν** δύνανται να αντιστοιχηθούν μέσω μιας «1-1 και επί» αντιστοίχισης με το σύνολο των φυσικών Ν. Αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι εφικτό και όλοι οι αριθμοί του (0, 1) έχουν αντιστοιχηθεί στο Ν , τότε σύμφωνα με το περίφημο «διαγώνιο επιχείρημα» του Cantor μπορούμε να βρούμε στοιχείο του (0,1) , που «να περισσεύει» και να μην έχει αντιστοιχηθεί , όπερ…άτοπο !

[2] Εδώ αξίζει να σκεφθούμε ότι το $\mathbb{Q}$ χαρακτηρίζεται από την Ανάλυση ως «πυκνό» , δηλαδή μεταξύ δύο οσοδήποτε γειτονικών ρητών, πάντα υπάρχει κι ένας τρίτος!

περισσότεροι κι από τους αλγεβρικούς αριθμούς[3] A , περισσότερους ακόμα κι από το πλήθος των στοιχείων του A^{κ} , όπου κ οποιοσδήποτε φυσικός!

Αν έχομε όρεξη να κατασκευάσουμε ένα ακόμη μεγαλύτερο σύνολο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντυπωσιακή πρόταση που λέει ότι «Αριθμήσιμη[4] ένωση αριθμησίμων συνόλων, μας δίνει αριθμήσιμο σύνολο»

Για παράδειγμα, αν ορίσω ως $A_n = \{x_n : x \in A, n \in A, \text{όπου } A \text{ το σύνολο των Αλγεβρικών}\}$ αυτό είναι ένα αριθμήσιμο απειροσύνολο. Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση , τότε και το σύνολο $\overset{1}{A} = \bigcup_{i \in A} A_i$ είναι ένα απίστευτα μεγάλο , πλην αριθμήσιμο συνολο. Με επαγωγικό τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ακόμα πιο μεγάλα αριθμήσιμα σύνολα , λ.χ.

$\overset{n}{A} = \bigcup_{i \in A} \overset{n-1}{A_i} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. (1)

Και βέβαια αυτό μπορεί να συνεχιστεί ….άπειρες φορές, αλλά θα δίνει πάντα αριθμήσιμα σύνολα. Σκεφθείτε το μέγεθος του αριθμήσιμου συνόλου που προκύπτει από μια μικρή τροποποίηση της (1) , αν όπου A , θέσω $\overset{n-1}{A}$ (φανταστείτε το!). Μόνο που κι αυτό το απιστεύτως μεγάλο σύνολο θα είναι αριθμήσιμο. Και φυσικά η κατασκευή αυτή δεν σταματά εδώ!

Τώρα ήλθε η στιγμή να αλλάξουμε ποιότητα…..απείρου! ‘Ετσι:

Αν θεωρήσουμε το ελαχίστου μέτρου υποσύνολο του (0,1) , λ.χ. το διάστημα $X=(0, 10^{-100.000.000.000.000})$ με $\mu(X)=10^{-100.000.000.000.000}$ θα εξακολουθήσει να έχει ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ[5] στοιχεία από το…. $\overset{n}{A}\, (\forall n \in \mathbb{N})$, ακόμα και από το $(\overset{n}{A})^k \;\; \forall n,k \in \mathbb{N}$. Αλλά $\mu((\overset{n}{A})^k)=0$ (ως προς το σύνηθες μέτρο μ).

Εδώ μπορεί εύκολα να γίνει η ενορατική σκέψη, πως η ειδοποιός ποιοτική διαφορά μεταξύ αριθμήσιμου και υπεραριθμήσιμου απείρου είναι το μέτρο μηδέν ή μέτρο μεγαλύτερο του μηδενός. `Ομως τα πράγματα δεν είναι έτσι! Το περίφημο «σύνολο του Cantor[6]» παρ’ ότι έχει μέτρο ίσο με 0 , εν τούτοις είναι υπεραριθμήσιμο και έτσι κι αυτό περιέχει ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ στοιχεία από το σύνολο $(\overset{n}{A})^k \;\; \forall n,k \in \mathbb{N}$.

---

[3] Τους αλγεβρικούς αριθμούς A , μπορούμε να τους φανταστούμε ως το $\mathbb{Q}$, αν του προσαρτήσουμε ακόμη και όλες τις τετραγωνικές ρίζες ρητών, χρησιμοποιώντας τις 4 γνωστές πράξεις, ακόμα και την ύψωση σε δύναμη , αλλ’ όμως δύναμη με **ρητό** εκθέτη .

[4] Παραθέτουμε τον ορισμό του Αρισθμησίμου συνόλου: **Ένα σύνολο λέγεται αριθμήσιμο, όταν δύναται να τεθεί σε αντιστοιχία «1-1 και επί» με υποσύνολο του N ή το ίδιο το N.** Σύμφωνα με αυτόν , όλα τα πεπερασμένα είναι αριθμήσιμα και από τα άπειρα μια μεγάλη κατηγορία που είναι και υπερσύνολα του N, όπως λ.χ. το

[5] «ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ» πάντα με την μαθηματική έννοια ότι **πλέον δεν είναι αριθμήσιμο .** Διότι και το $\mathbb{Z}$ έχει «διπλάσια» στοιχεία από το $\mathbb{N}$, όμως και τα δύο είναι αριθμήσιμα άρα έχουν «ίσο» αριθμό στοιχείων .

[6] Το σύνολο του Cantor ορίζεται ως εξής: Θεωρούμε το σύνολο [0,1] . Το χωρίζουμε σε τρία μέρη ίσου μέτρου ως εξής: [0, 1/3] , [1/3, 2/3] , [2/3,1] Κρατάμε τα δύο ακραία και πετάμε το μεσαίο. Σε κάθε ένα από τα δύο που έχουμε, επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία: Δηλ. Τα χωρίζουμε σε τρία ίσα μέρη, πετάμε το μεσαίο και κρατάμε τα δύο ακραία. Αυτή την διαδικασία θεωρούμε ότι την εκτελούμε επ’ άπειρον. Το προκύπτον σύνολο , είναι το περίφημο «σύνολο του Cantor» το οποίο έχει σπουδαίες ιδιότητες, μία των οποίων είναι , ότι παρ’ ότι έχει μέτρο 0 , είναι υπεραριθμήσιμο!.

Περισσότερο ενδιαφέρον, αλλά και παραστατικότητα , παρουσιάζει το μαθηματικό γεγονός, ότι αν τμήσουμε το διάστημα (0,1) με μια ευθεία, η πιθανότητα να το τμήσουμε σε αλγεβρικό αριθμό, είναι …μηδέν!

Από την άλλη, το σύνολο των συναρτήσεων f : $(0,1) \longrightarrow \{0,1\}$ έχει περισσότερα στοιχεία από το (0,1) και μεταπηδούμε σε ακόμα ανώτερη τάξη απείρου! Κι αυτό βέβαια δεν σταματά μόνον εδώ!……

Επανερχόμενοι λοιπόν στο αρχικό ερώτημα , διαπιστώνομε με ότι υπάρχουν οντότητες άπειρες που περιέχουν άλλες «απείρως άπειρες» οντότητες. Συνεπώς , είναι δυνατόν μια άπειρη οντότητα όπως ο Θεός είναι δυνατόν να παράξει άπειρο αριθμό άπειρων οντοτήτων. Βεβαίως όλα αυτά με την προϋπόθεση ότι οι μαθηματικές οντότητες «όντως υπάρχουν» στον πραγματικό κόσμο και όχι σε κάποιον αφηρημένο ιδεατό μαθηματικό κόσμο ως ιδεατά μαθηματικά αντικείμενα. Με αυτή την θεώρηση η απάντηση στο ερώτημα, βεβαίως δεν είναι κλειστή και το περίφημο θεολογικό ερώτημα του Μεσαίωνα περί του «Πόσοι `Αγγελοι είναι δυνατόν να χορέψουν στο κεφάλι μιας καρφίτσας» θα μένει ακόμα ανοικτό σε θεωρήσεις και απαντήσεις.

ΕΡΩΤΗΜΑ 2. **Ο Θεός ως Παντοδύναμος , δύναται να κατασκευάσει μια πέτρα που να μην μπορεί να την …σηκώσει**;

Απάντηση:

Η δήθεν απάντηση λέει ότι «αν μεν δεν μπορεί , τότε δεν είναι Παντοδύναμος» επίσης «αν μπορεί, τότε δεν θα μπορεί να σηκώσει την πέτρα, οπότε πάλι δεν είναι Παντοδύναμος!»

Η θεώρηση βεβαίως υπόκειται στην απλή Αριστοτέλεια λογική. Το συγκεκριμένο ερώτημα, απλώς…δεν έχει νόημα! , Στην ουσία ισοδυναμεί με το ερώτημα «αν είναι δυνατόν ο Θεός που είναι Παντοδύναμος , να μην είναι …Παντοδύναμος!» . Πρόκειται για αντίφαση. Σύμφωνα με την «αρχή της αποκλίσεως μέσου ή τρίτου» που κατά κόρον χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά , για κάθε πρόταση P , (ή P αληθής ή ~P αληθής). Επομένως το αγαπημένο αυτό ερώτημα των μαθητών προς τους θεολόγους καθηγητές τους, απλώς , δεν είναι κανονικό –λογικό ερώτημα!……

Το ενδιαφέρον της παραπάνω ερωτήσεως είναι το μη προφανές του μη νοήματός της! Αυτό μάλλον συμβαίνει διότι ο λογισμός με το άπειρο , ακόμα και σε στοιχειώδες επίπεδο δίνει συχνά αποτελέσματα μη ευκόλως αποδεκτά –κατανοητά από την ανθρώπινη συνείδηση που έχει μάθει να λογίζεται με πεπερασμένες οντότητες.

Ενδιαφέρουσα είναι και μια προσπάθεια απάντησης και του δικού μου θεολόγου πριν δεκαετίες , όπου προφανώς μη αντιλαμβανόμενος το αντιφατικόν του ερωτήματος, μου έδωσε την εξής μεταφυσική απάντηση: «Ο Θεός δεν υπακούει στο δίπολο «λογικό-παράλογο» αφού είναι «Υπέρλογος!»

ΕΡΩΤΗΜΑ 3. **Υπό ποία έννοια ο Ιησούς ήταν «Θεάνθρωπος;»**

Απάντηση:

Φυσικά πρόκειται για «δόγμα» της Χριστιανικής θρησκείας. Την έννοια «δόγμα» ένας μαθηματικός την κατανοεί ως μια πρόταση της οποίας την αλήθεια την δεχόμαστε . Αυτό μοιάζει με την έννοια «αξίωμα» με την διαφορά ότι το αξίωμα είναι προφανές και βέβαια με βάση αυτό (στα πλαίσια μιας θεωρίας) δεν μπορεί να παραχθεί αντίφαση. Υπάρχει όμως αντίφαση στην έννοια «Θεάνθρωπος;» Ας το δούμε:

Ο Χριστός ως Θεός έχει άπειρες δυνατότητες. Ως άνθρωπος έχει πεπερασμένες . Σύμφωνα λοιπόν με την αρχή «άπειρο +πεπερασμένο=άπειρο» θα μπορούσαμε να πούμε αντιστοίχως , ότι «Θεός+άνθρωπος=Θεός» Συνεπώς η ανθρώπινη συμπεριφορά του Ιησού είναι απολύτως αντιφατική. Εκτός αν δεχθούμε ότι άλλες χρονικές περιόδους

ήταν Θεός και άλλες άνθρωπος. Αυτό ένας θεολόγος –ίσως- δεν το δέχεται, αφού ο Θεός είναι «πέραν του χρόνου» και «υπέρ τον χρόνο» . Και σίγουρα αποτελεί δόγμα, πλην όμως η διαφαινόμενη αντίφαση πρέπει να απαντηθεί περισσότερο πειστικά.

Βεβαίως κι από την μυθολογική μας αρχαιότητα υπήρχε η έννοια του «ημιθέου» πλην όμως αυτή ήταν μη αντιφατική, αρκετά σαφώς ορισμένη και –το κυριότερο- οι τότε «Θεοί» είχαν μεν τεράστιες δυνατότητες, όχι όμως και άπειρες !….

ΕΡΩΤΗΜΑ 4 . **Ο κόσμος μας , με όλα τα στραβά του και τα ανάποδά του (πόλεμοι, εγκλήματα, φτώχια, αδικία κ.τ.λ.) είναι ο καλύτερος δυνατός κόσμος που θα μπορούσε να κατασκευάσει ο Θεός;**

Απάντηση: Και η διατύπωση και η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα ανήκει στον μεγάλο φιλόσοφο και εκ των θεμελιωτών του απειροστικού λογισμού Leibniz. Το εξαιρετικά εντυπωσιακό είναι ότι ο Leibniz απαντά «ναι» και το αποδεικνύει! το είδος του αποδεικτικού συλλογισμού που χρησιμοποιεί λέγεται «τρίλημμα» αφού στηρίζεται σε τρεις προτασιακές συνιστώσες[7].

Σύμφωνα με τον Leibniz:

«Αν ο κόσμος μας δεν είναι άριστος, ο Θεός που τον δημιούργησε ή δεν ήξερα ή δεν ήθελε ή δεν μπορούσε να τον κάνει άριστο.

Αλλά ο Θεός ως Πάνσοφος ήξερε, ως Πανάγαθος ήθελε και ως Παντοδύναμος μπορούσε να τον κάνει άριστο.

`Αρα: Ο κόσμος μας είναι άριστος!»

Η παραπάνω απόδειξη του Leibniz λογικά είναι υποδειγματικά άψογη . Το συμπέρασμα όμως –εμπειρικά- μοιάζει «αντιφατικό» .γιατί αυτό; Μήπως επειδή χρησιμοποιεί ιδιότητες του Θεού που εμπεριέχουν το άπειρο; Πράγματι :

«Πανάγαθος» , δηλ έχει άπειρο βαθμό αγαθότητας . «Πάνσοφος» : `Εχει άπειρο βαθμό σοφίας και γνώσης . «Παντοδύναμος» : `Εχει απεριόριστες δυνατότητες. Αν σκεφθούμε ότι ιστορικά ο άνθρωπος έκανε αρκετά λάθη στην προσπάθειά του να εξηγήσει το άπειρο , προφανώς λόγω του πεπερασμένου της ανθρώπινης φύσεώς του, μπορούμε να πούμε –και εδώ-ότι η διαφαινόμενη «αντίφαση» του συμπεράσματος του Leibniz , δεν αποτελεί αντίφαση μεταξύ συμπεράσματος και πραγματικότητας, αλλά αντίφαση μεταξύ συμπεράσματος ιδεατής ,υποκειμενικής, δεοντολογικής και περατοκρατικής τρόπον τινά αντίληψης που συνήθως έχουν οι άνθρωποι για τον κόσμο. Η λογική λέει ότι η έννοια «καλό» δεν είναι ούτε αυθύπαρκτη , απομονωμένη , ούτε αυτοοριζόμενη, αλλά υπάρχει και κατανοείται μόνο ως δίπολο με την έννοια «κακό». Και αυτό βεβαίως πέραν από την εξαιρετικώς αμφίβολη υποκειμενική εκτίμηση του τι είναι «καλό» ή «κακό» Επίσης ιστορικά είχαμε πολλά προβλήματα στην πορεία κατανοήσεως ιδιοτήτων του απείρου, πόσο μάλλον αυτού του ιδίου. Ο ίδιος ο Leibnitz είχε υποστεί μεγάλη κριτική από τον Επίσκοπο του Berkeley σχετικά με τα απειροστά που είχε εισάγει τότε, στις απαρχές του απειροστικού λογισμού , όπου άλλοτε θεωρούσε το dx ως μηδέν και το απάλειφε , ενώ παρακάτω διαιρούσε με το dx υποθέτοντας το διάφορο του μηδενός![8] Συνεπώς ο λογισμός με το άπειρο, δεν παράγει πάντοτε αποτελέσματα αμέσως αποδεκτά από την ανθρώπινη νόηση. Οι δύσκολες έννοιες του απείρου και του απειροστού δεν γίνονται αμέσως κατανοητές από την ανθρώπινη διαίσθηση. Το πιστοποιεί η λίαν ενδιαφέρουσα και πολύ μακρά πορεία θεμελιώσεως του Απειροστικού Λογισμού , από τον Αρχιμήδη έως τον

---

[7] Βλέπε σελ. 162 «ΛΟΓΙΚΗ» Ευάγγελου Π. Παπανούτσου , εκδόσεις Δωδώνη , Αθήνα –Γιάννινα 1985.

[8] Βλέπε «Εισαγωγή στην Φιλοσοφία των Μαθηματικών» Διονυσίου Α. Αναπολιτάνου, εκδόσεις ΝΕΦΕΛΗ , Αθήνα 1985. σελ. 116

Waierstrass . Τα παράδοξα του Ζήνωνος , αλλά και τα μεταγενέστερα διάσημα παράδοξα του Russell , του Cantor , των Bourali-Forti περιέχουν πάντα την «περίεργη» έννοια του απείρου[9].

`Ενα πείραμα που φανερώνει το μη προφανές της κατανόησης των ιδιοτήτων του απείρου και το οποίο μπορεί να δοκιμάσει ο καθένας , είναι να θέσει σε φοιτητές μαθηματικών αλλά και μαθηματικούς το εξής ερώτημα:

«Αν προσθέσω άπειρους στο πλήθος θετικούς αριθμούς , τι αποτέλεσμα θα πάρω; `Απειρο ή πεπερασμένο;» ή το γεωμετρικό ισοδύναμο ερώτημα : «Αν θέσω άπειρα ευθύγραμμα τμήματα επ’ ευθείας, τι θα προκύψει; Ευθ. τμήμα, ημιευθεία ή ευθεία;»

Και βέβαια το ότι από άπειρους θετικούς μπορεί να προκύψει και πεπερασμένο άθροισμα ή αντιστοίχως ότι άπειρα ευθύγραμμα τμήματα ενδεχομένως να παράγουν ευθύγραμμο τμήμα , αυτές θα είναι απαντήσεις με την μικρότερη συχνότητα, παρ’ ότι αποτελεί κοινό τόπο και λίαν χρησιμοποιούμενο μαθηματικό αποτέλεσμα σε εκατοντάδες εφαρμογές το γεγονός ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$. Μπορεί μάλιστα το προηγούμενο αποτέλεσμα να διδάσκεται από την Β’ Λυκείου , αλλά ο βαθμός αφομοίωσής του , είναι ελάχιστος. Κάθε μαθηματικός ,στον περίγυρό του ,μπορεί να το επαληθεύσει.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η προσπάθεια «λογικής ερμηνείας» του «παράδοξου»(«Παράδοξο» διαισθητικά βεβαίως , για το πώς άραγε είναι δυνατόν άπειρες θετικές οντότητες να έχουν πεπερασμένο άθροισμα)

«Χμ!…..» μου είπε ένας συνομιλητής μου: «Νομίζω ότι κατανοώ πλήρως το αποτέλεσμα! Αυτό εξηγείται από το γεγονός, ότι ναι μεν διαρκώς προστίθεται κάποια θετική ποσότητα, αλλά αυτή είναι διαρκώς μικρότερη, οπότε μετά από κάποιο αριθμό βημάτων εκφυλίζεται σε απειροστό , που δεν μπορεί να αυξήσει σε άπειρο το άθροισμα και το κρατάει σε πεπερασμένα επίπεδα!….»

Βεβαίως όταν του υπεδείχθη ότι $\sum_{n=2.000.000.000}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$, τότε ο ενθουσιασμός της «διαισθητικής κατανόησης» του προηγούμένου «παραδόξου» αντικαταστάθηκε από απορία και προβληματισμό…..

Ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον επιστημολογικά και διδακτικά έχει το γεγονός ότι ο χωρισμός ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άπειρα άλλα ευθύγραμμα τμήματα , είναι πολύ εύκολα αποδεκτός από την ανθρώπινη συνείδηση. Το αντίστροφο όμως γίνεται εξαιρετικά δύσκολα αποδεκτό , αφού τα άπειρα ευθύγραμμα τμήματα «πρέπει» να έχουν άθροισμα ή ημιευθεία ή ευθεία , δηλ. άπειρη οντότητα, αλλά ποτέ ευθ. τμήμα δηλ. πεπερασμένη οντότητα.

Κατά την γνώμη του γράφοντος , το προηγούμενο αποτελεί και τον πυρήνα των περίφημων παραδόξων του Ζήνωνα , αφού λ.χ. στο παράδοξο του βέλους που ποτέ δεν φθάνει στον στόχο του, είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνει αποδεκτό από την ανθρώπινη συνείδηση ότι άπειρες χρονικές περίοδοι ενδεχομένως να έχουν άθροισμα πεπερασμένη χρονική περίοδο.

Από τα προηγούμενα καθίσταται περισσότερο φανερή η δυσκολία κατανοήσεως σε βάθος της έννοιας του απείρου, η οποία ακολούθησε μακρά ιστορική περίοδο ξεκαθαρίσματος . Συνεπώς , αφού είναι δύσκολη η κατανόησή της σε βάθος ακόμα κι από μαθηματικούς, είναι προφανής και ο προβληματισμός του κατά πόσον είναι

---

[9] Τα διάσημα αυτά παράδοξα αλλά και άλλα περιέχονται στο βιβλίο της υποσημειώσεως (5) σελ. .200

δυνατόν αυτή η έννοια να γίνει εργαλείο χειρισμού σε ένα χώρο που επικρατούν δόγματα και εξ αποκαλύψεως αλήθειες. Αν μη τι άλλο όμως είναι προκλητική η χρήση των μαθηματικών συμπερασμάτων στο έλεγχο των δογμάτων από απόψεως φυσικής και λογικής υποστάσεως. Ως καίριο παράδειγμα έχουμε το παρακάτω τελευταίο ερώτημα και τον ενδιαφέροντα προβληματισμό του .

ΕΡΩΤΗΜΑ 5. **Ο Θεός υπόσχεται «αιώνια ζωή» αλλά και «αιώνια τιμωρία» σε όσους ανθρώπους δεν διάγουν ενάρετο και Χριστιανικό βίο στην παρούσα πεπερασμένη φάση της ζωής μας . Υπάρχει κάποιο παράδοξο σε αυτή την υπόσχεση του Θεού και ποίο;**

Απάντηση:

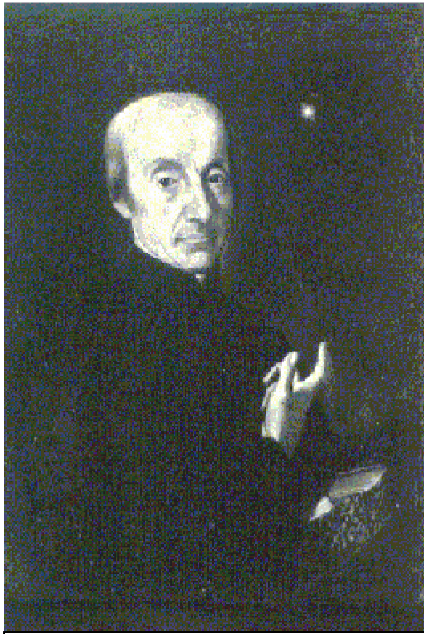
Αν πάρουμε την πεπερασμένη ζωή μας σε σχέση με την άπειρη «αιώνια ζωή» , έχουμε το αποτέλεσμα του 0%. Είναι αυτό που πολύ καλά γνωρίζουμε από τον απειροστικό λογισμό ότι $\frac{\pi\varepsilon\pi\varepsilon\rho\alpha\sigma\mu\acute{\varepsilon}\nu o}{\infty}=0$. Το προηγούμενο αποτέλεσμα είναι απόλυτο. `Οσο μεγάλη ζωή και να ζήσει ο άνθρωπος , ακόμα και δισεκατομμύρια έτη (που προφανώς είναι ανέφικτο ακόμα και για το απώτατο μέλλον) σε σχέση με την «αιώνια ζωή» (=άπειρα χρόνια) είναι ένα παγερό ολοστρόγγυλο μηδενικό! Ακόμα πιο παραστατικό είναι το να αντιληφθούμε , ότι η παρούσα φάση της πεπερασμένης ζωής μας , είναι ακριβώς μηδενικής διάρκειας, σε σχέση με την μεγάλη υπόσχεση του Θεού για αιώνια και μακάρια ζωή , με δεδομένη και την αθανασία της ψυχής.

Με δεδομένο το προηγούμενο, η παραβατικότητα («αμαρτίες») των ανθρώπων καθίσταται φαινόμενο «άπειρης βλακείας». Η προηγούμενη εντός εισαγωγικών φράση, δεν αποτελεί εδώ ένα σχήμα λόγου, αλλά μια κυριολεξία , αν μεταφραστούν οι συνέπειες της πραγματικότητας που όλοι βλέπουμε καθημερινά. Δηλαδή με άλλα λόγια, το ίδιο το γεγονός της διακύβευσης απώλειας της αιώνιας ζωής με την παραβατικότητα που εμφανίζουν οι πιστοί, οδηγεί στο νομοτελειακό συμπέρασμα της «άπειρης βλακείας» . Δεν πρέπει να μας εκπλήσσει ένα τέτοιο συμπέρασμα, αλλά αντιθέτως να μας εμβάλλει σε σοβαρό στοχασμό για το πώς είναι δυνατόν να διακινδυνεύει κάποιος πιστός την αιώνια ζωή κάνοντας αμαρτίες σε μια ζωή κατ' ουσίαν μηδενικής διάρκειας. Διακινδυνεύεται - κατ' επανάληψιν μάλιστα - η αιώνια ζωή (οι αμαρτίες είναι καθημερινότητα για όλους τους πιστούς) για το μηδέν; Διακινδυνεύεται η παραπομπή στο «πυρ το εξώτερον» αιωνίως και ανεπιστρεπτί (ως γνωστόν «Δεν υπάρχει μετάνοια μετά θάνατον») για παραβάσεις του ηθικού Χριστιανικού κώδικα από πιστούς σχεδόν καθημερινά και αυτό το γεγονός δεν συνιστά μια άκρως ακατανόητη συμπεριφορά ; Επομένως , αν από την μία μεριά τεθεί η ανθρώπινη συμπεριφορά κι από την άλλη η υπόσχεση του Θεού, βλέπουμε κάτι που είναι άκρως ακατανόητο . Τότε γιατί οι άνθρωποι ρέπουν προς την αμαρτία με τέτοια συχνότητα και μάλιστα οι πιστοί; Εδώ η ύπαρξη της διαβολικής οντότητας μπορεί να εξηγήσει την συμπεριφορά αυτή, από την άλλη όμως , καταρρακώνεται κάθε έννοια ελευθερίας αυτοβουλίας και αυτεξούσιου του ανθρωπίνου όντος . Μία «πονηρή» οντότητα παρεμβαίνει στην βούληση του ανθρώπου και τον ωθεί σε αμαρτίες; Περιποιεί τιμή στον άνθρωπο η φράση «δεν φταίω εγώ ο όφις με εξηπάτησε;» Ικανοποιείται η ανθρώπινη αξιοπρέπεια με την συχνή και διαρκή προσφυγή στην εξομολόγηση για απάλειψη των ανομιών; Από την άλλη η αληθινή πίστη προς τον Θεό δεν αποτελεί ικανή συνθήκη για την μη διάπραξη ανομιών – τουλάχιστον με μεγάλη συχνότητα- από μέρους των δηλούντων ανενδίαστως και απολύτως ότι είναι βέβαιοι για την ύπαρξη του ανωτάτου `Οντος; Δεν υπάρχει τεράστια αντίφαση στην καθημερινή συμπεριφορά των ανθρώπων;

Αλλά βέβαια ο προβληματισμός δεν μπορεί να εξαντληθεί στα προηγούμενα , μπορεί όμως να προαχθεί σε ανώτερο επίπεδο και με την χρήση των εργαλείων των Μαθηματικών και να προσεγγισθεί η αλήθεια υπό όποια έννοια υπάρχει κι αν βεβαίως υπάρχει………

SUMMARY:

In all the religions, the god is infinite. It's comprehension, if it is feasible, passes through the comprehension of the infinite. The instinctive accession of the meaning of the infinite, historically has leaded into faults, misapprehensions, paradoxes and fertile contradictions. Today Mathematiques have very much penetrated in the meaning of the infinite, and because of this the philosophical and theological reflection can be enhanced. Also the Mathematician logic has attempted some of its paradoxes. Having all these equipments we can access questions as the followings: Can the God create other infinite beings, being itself an infinite being? As long as it is omnipotent, can it construct a stone that it cannot lift? The meaning of "human God" that is given to the Christ, is it inconsistent? Could the God create a better world than the world of the wars, the fame and the injustice, that he it has created? (Not according to Leibniz). Does the faith of a man to the God and his simultaneous default through his signs make him the acme of the human absurdity? These questions are examined in the present work that tries to give answers or to enlarge the field of their reference.

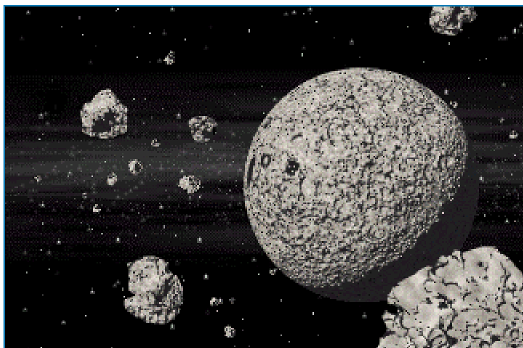


Ο Αστρονόμος Piazzi

Αστεροειδής Ceres

Τον Ιανουάριο του 1801 ο αστρονόμος Piazzi παρατήρησε για λίγο έναν νέο πλανήτη, και αμέσως τον έχασε (σήμερα είναι γνωστό οτι επρόκειτο για τον αστεροειδή Ceres). Οι προσπάθειες των αστρονόμων να τον εντοπίσουν παρέμειναν άκαρπες. Τον Δεκέμβριο του ίδιου έτους ο Gauss υπέδειξε, που να τον αναζητήσουν και μάλιστα προέβλεψε και την μελλοντική του θέση σε κάθε χρονική στιγμή. Τότε ο Gauss δεν είχε αποκαλύψει την μέθοδό του και έφτασε να κατηγορηθεί ακόμα και για μαγεία. Μόνο το 1809 αποκάλυψε οτι κατάφερε να τον εντοπίσει, υποθέτοντας ελλειπτική τροχιά και αναπτύσσοντας συστηματικά την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων του Legendre.

Υποθέτουμε οτι η εξίσωση της ελλειπτικής του τροχιάς, αναφέρεται στους κύριους άξονες της και οτι (x_i, y_i), i=1, 2, ..., ν είναι οι συντεταγμένες του πλανήτη στο επίπεδο όπου αυτός παρατηρήθηκε. Να βρεθεί με χρήση γενικευμένου αντιστρόφου η λύση ελαχίστων τετραγώνων για την τροχιά του, αν γνωρίζουμε τις 4 συντεταγμένες (1, 1), (0, 2), (-1, 1), (-1, 2)



Λύση

Αφού η εξίσωση της ελλειπτικής τροχιάς αναφέρεται στους κύριους άξονες της, θεωρούμε ότι η έλλειψη αυτή, έχει εξίσωση της μορφής

$$c:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \textbf{(1)}$$

θέτουμε $\frac{1}{a^2}=k$ και $\frac{1}{b^2}=l$ οπότε η (1) γίνεται:

$$c: kx^2+ly^2=1 \qquad \textbf{(2)}$$

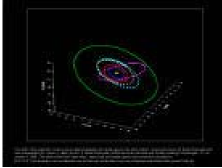
Όμως τα σημεία Α(1, 1), Β(0, 2), Γ(-1, 1) και Δ(-1, 2) ανήκουν στην έλλειψη συνεπώς οι συντεταγμένες τους θα επαληθεύουν την **(2)**. Δηλαδή :

$$\begin{cases} A\in c \\ B\in c \\ G\in c \\ D\in c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l=1 \\ 0k+4l=1 \\ k+l=1 \\ k+4l=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+l=1 \\ 0k+4l=1 \\ k+4l=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=B$$

όπου $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}k\\ l\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$.

Όμως $\begin{cases}k+l=1\\ 0k+4l=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{3}{4}\\ l=\frac{1}{4}\end{cases}$

και το ζεύγος $(k,l)=(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$ δεν επαληθεύει την εξίσωση $k+4l=1$.



Άρα το σύστημα $AX=B$ είναι αδύνατο.
Γνωρίζουμε οτι η λύση ελαχίστων τετραγώνων *** ενός μη συμβιβαστού συστήματος $AX = B$, mxn, ικανοποιεί την εξίσωση $A^TA\overline{X}=A^TB$.

Αν οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε ο πίνακας A^TA αντιστρέφεται και ισχύει οτι: $\overline{X}=(A^TA)^{-1}A^TB$.

Εξετάζουμε αν οι στήλες του πίνακα $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Έστω $c_1,c_2 \in R : c_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\ 4\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1+c_2=0\\ 0c_1+4c_2=0\\ c_1+4c_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c_1=0\\ c_2=0\end{cases}$

Συνεπώς οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή ο 2x2 τετραγωνικός πίνακας A^TA αντιστρέφεται, και ο γενικευμένος αντίστροφος του $(A^TA)^{\perp}$ ταυτίζεται με τον συνήθη αντίστροφό του $(A^TA)^{-1}$.

Τότε $A^TA\overline{X}=A^TB \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 4\\ 1 & 4\end{bmatrix}\overline{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 33\end{bmatrix}\overline{X}=\begin{bmatrix}2\\ 9\end{bmatrix}$ **(3)**

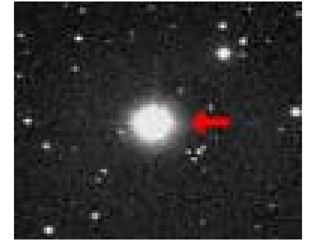
Όμως $\det(A^TA)=66-25=41\neq 0$

Άρα ο A^TA αντιστρέφεται και $(A^TA)^{\perp}=(A^TA)^{-1}=\frac{1}{\det(A^TA)}\begin{bmatrix}33 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow$

$(A^TA)^{\perp}=(A^TA)^{-1}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}33 & -5\\ -5 & 2\end{bmatrix}$.

Συνεπώς η **(3)** γράφεται:

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 33\end{bmatrix}\overline{X}=\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}\Leftrightarrow\frac{1}{41}\begin{bmatrix}33 & -5\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\5 & 33\end{bmatrix}\overline{X}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}33 & -5\\-5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\9\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$



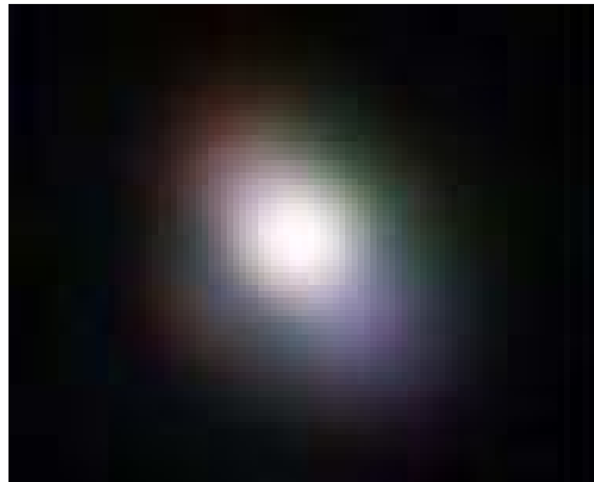
$$I_2\overline{X}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix}21\\8\end{bmatrix}\Leftrightarrow\overline{X}=\begin{bmatrix}\frac{21}{41}\\\frac{8}{41}\end{bmatrix}.$$

Συνεπώς η εκτίμηση ελαχίστων τετραγώνων για τους k,l είναι η $\begin{cases}k=\frac{21}{41}\\l=\frac{8}{41}\end{cases}$

Συνεπώς η **(2)** γράφεται: $\frac{21}{41}x^2+\frac{8}{41}y^2=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\frac{41}{21}}+\frac{y^2}{\frac{41}{8}}=1\Leftrightarrow\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{21}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{8}}\right)^2}=1.$

Άρα η λύση ελαχίστων τετραγώνων για την ελλειπτική τροχιά του αστεροειδούς είναι η

$$c:\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{21}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{41}{8}}\right)^2}=1$$

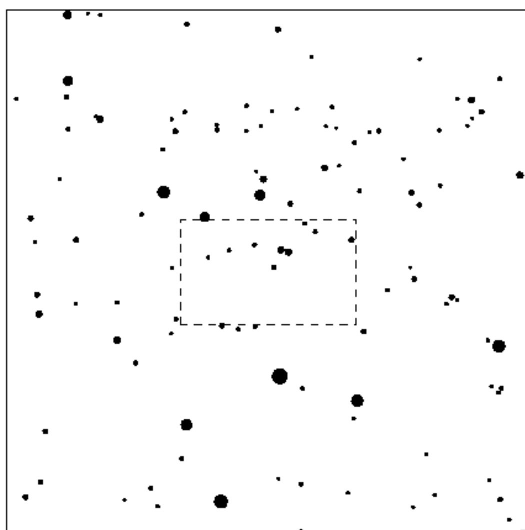


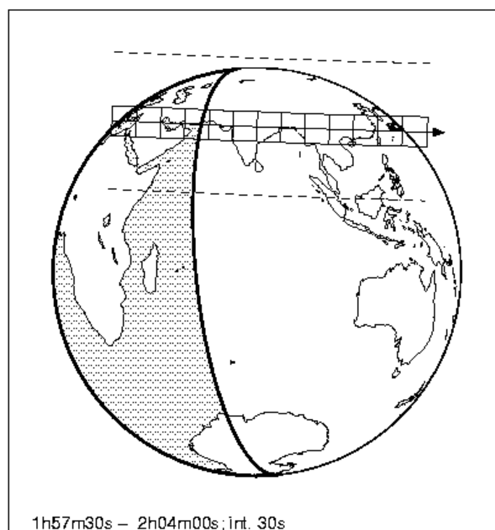
Ουρανογραφικά στοιχεία του Ceres

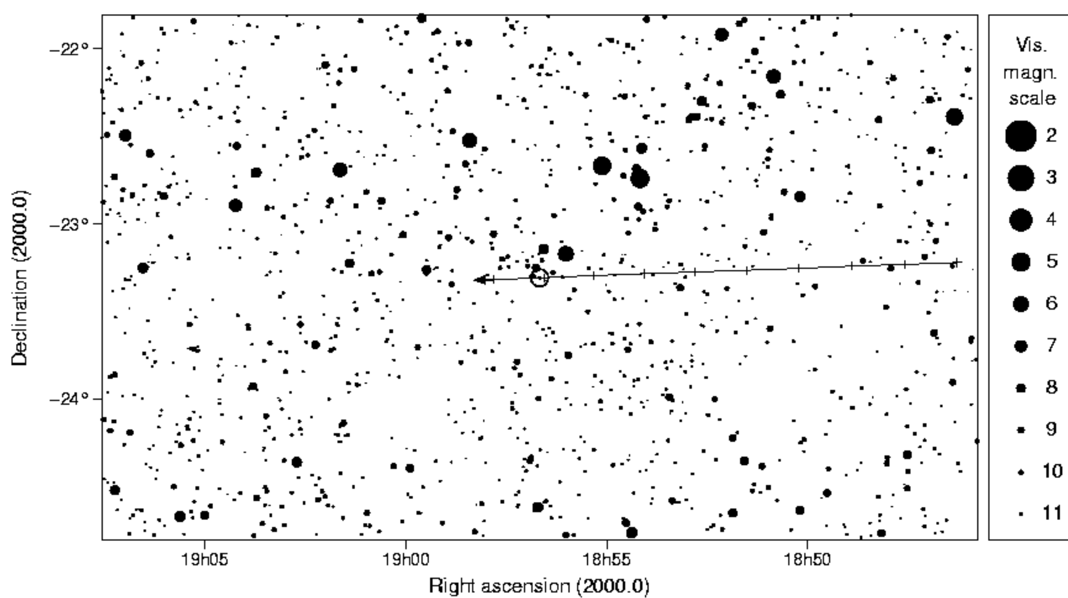
1 Ceres – TYC 6860–00966–1

2001 mar 16 $2^h\ 0.6^m$ U.T.

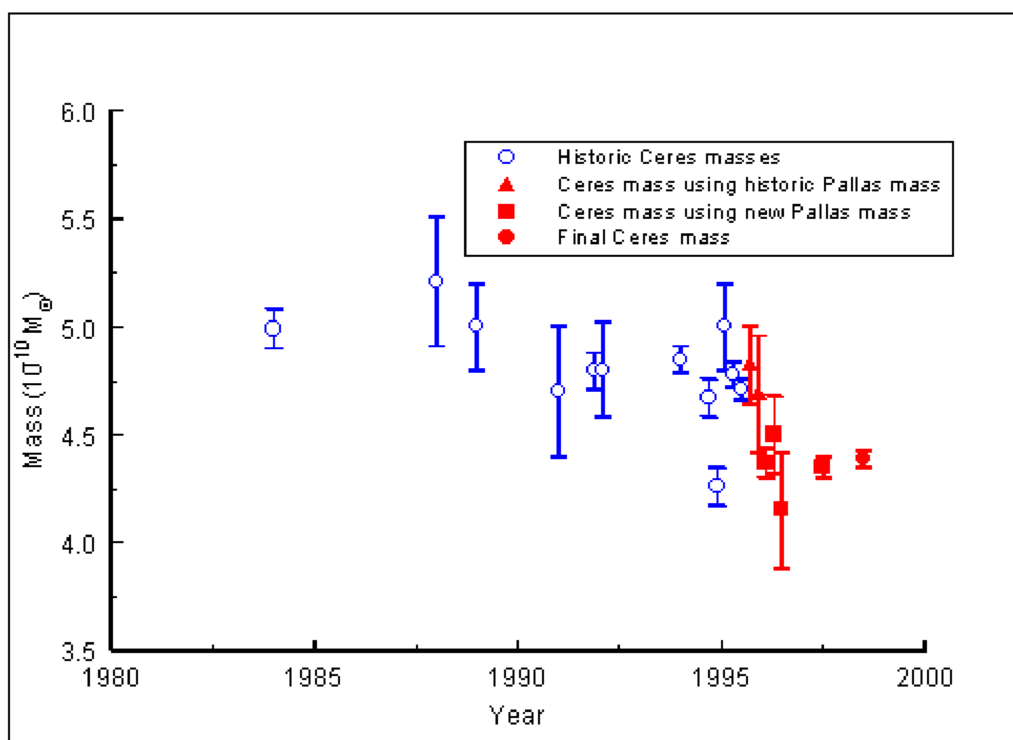
Planet :			Star :	Source kat. TYC2
V. mag. = 8.97	Diam. = 932.6 km = 0.43"		$\alpha = 18^h 56^m 40.233^s$	$\delta = -23°18'41.42"$
μ = 42.71"/h	π = 2.97"	Ref. = EG1997–059	V. mag. = 11.16	Ph. mag. = 11.04
Δm = 0.1	Max. dur. = 36.7s		Sun : 72°	Moon : 26° , 58%







A01_0301.PS : 2000-06-13 19:59:32 2 Agfa-Gevaert N.V., Mortsel, Belgium



Προσδιορισμός-μεταβολή της μάζας του Ceres με τα έτη και με την μέθοδο μέτρησης.

Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών

Γιάννης Π. Πλατάρος[1] ,Αθηνά Δ. Παπαδοπούλου[2]

[1] Εκ/κος Δ.Ε. νομού Μεσσηνίας ,ΜΠΕ :Διδ/κη & Μεθ/γία Μαθηματικών Εκπαιδευτής Β΄ επιπέδου , plataros@sch.gr
[2]Μαθηματικός, Μετ. φοιτ. ΜΔΕ Διαφορικές Εξισώσεις και Δυναμικά Συστήματα. athenamath@hotmail.com

Περίληψη
Θεωρητικά, το πείραμα στη γεωμετρία αποτελεί ξένο σώμα. Όμως, πρακτικά κατέχει τον πρωταρχικό και δεσπόζοντα ρόλο στην ανακάλυψη των προτάσεων (γέννηση εικασιών, ισχυροποίησή τους) οι οποίες μέλλουν να αποδειχθούν. Αυτό είναι κάτι που επιμελώς οι μαθητικοί αποκρύπτουν, αλλά αποτελεί την ρουτίνα της μαθηματικής ανακάλυψης. Στο σχολείο, σύμφωνα με τις σύγχρονες παιδαγωγικές θεωρίες, επανανακαλύπτεται η γνώση και άρα ο πειραματισμός έχει την θέση του στη διδακτική διαδικασία.
Λέξεις κλειδιά: πειραματική, πείραμα, Γεωμετρία.

1.Εισαγωγικά

Η πλειονότητα των θετικών επιστημών και δη των Φυσικομαθηματικών, έχουν προεξάρχοντα πειραματικό χαρακτήρα. Ένα σύνηθες μοντέλο εξέλιξής τους, είναι και το εξής: Ένας μεγάλος αριθμός πειραμάτων ή παρατηρήσεων (λ.χ. 1000) γενικεύονται και θεωρητικοποιούνται μέσω μιας θεωρίας που τα εξηγεί. Σε κάποια Ιστορική στιγμή υπάρχει μια 1001η παρατήρηση ή πείραμα που δεν συμφωνεί με τα προηγούμενα 1000. Τότε βγαίνει μια νέα θεωρία που καλύπτει τα 1000 προηγούμενα συν το 1001ο. Η προηγούμενη θεωρία δεν πάει αμέσως «στα σκουπίδια της ιστορίας» μιας και εξηγεί τα 1000 και συνήθως είναι απλούστερη της νεωτέρας. Αυτή φαίνεται να είναι η εξέλιξη αρκετών θετικών πειραματικών επιστημών(λ.χ. Χημεία Φυσική Βιολογία) , πλην Μαθηματικών. Στα Μαθηματικά, προ της **ατελούς επαγωγής** των πειραματικών επιστημών, υπάρχει η **τέλεια επαγωγή** (η οποία δια τούτο καλείται και «μαθηματική επαγωγή») και φυσικά η απόδειξη που αποτελεί την πεμπτουσία των Μαθηματικών. Είναι όμως έτσι τα πράγματα; Η απάντηση είναι, ότι πριν δημιουργηθεί μια πρόταση ή ένα θεώρημα, υπάρχει η εικασία γι αυτό, η επαλήθευση της εικασίας με παραδείγματα, η ενδεχόμενη τροποποίηση της με κάποιο αντιπαράδειγμα, η επανα-διατύπωση της πρότασης κ.οκ. Αυτή είναι η πορεία της μαθηματικής ανακάλυψης κατά Lakatos [1] που εγγενώς, φυσικά, εμπεριέχει το πείραμα την επαλήθευση την δοκιμή-πλάνη, δοκιμή –επαλήθευση. Όλα αυτά όμως κρύβονται πίσω από την κλασική παρουσίαση -εν προκειμένω της Γεωμετρίας- με τη

δομή Θεώρημα –απόδειξη, πόρισμα-απόδειξη, πρόταση -απόδειξη κ.ο.κ. μια δομή την οποία έχουν διδαχθεί γενιές μαθητών και καθηγητών μαθηματικών, οι οποίοι έχουν αποδεχθεί ως απολύτως φυσικό έναν τέτοιο τρόπο προσέγγισης και διδασκαλίας της γνώσης. Επομένως, κάτι το διαφορετικό προσκρούει σε κατεστημένες επί αιώνες αντιλήψεις, άρα ό,τι το νεωτερικό, οφείλει να είναι τέλεια και απολύτως πειστικά τεκμηριωμένο, ξεκινώντας από την ιστορία των μαθηματικών.

2. Η Ιστορικά, πειραματική Γεωμετρία

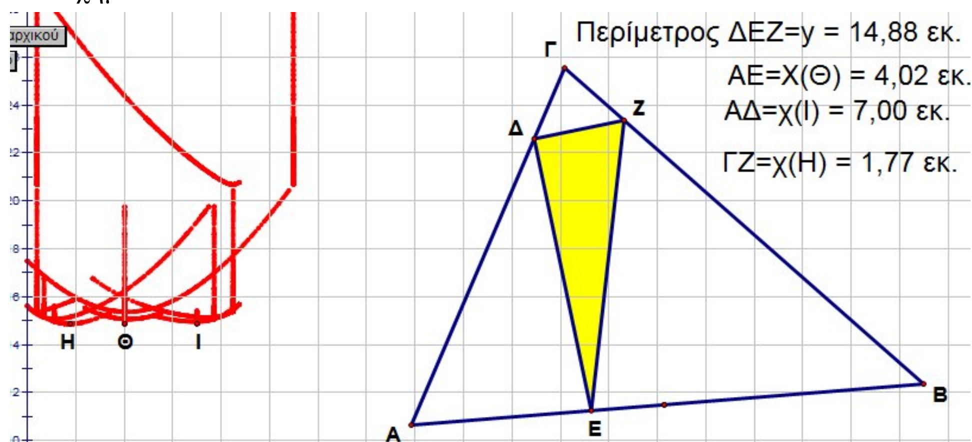
Είναι γνωστό, ότι ο Αρχιμήδης και οι "μηχανικές" του μέθοδοι , οδήγησαν σε τεράστια μαθηματική δημιουργία , όπως και του Ευδόξου και του Αρχύτα νωρίτερα, των πρώτων μεγάλων «πειραματικών μαθηματικών» (όπως εννοούμε σήμερα τον όρο «πειραματικά μαθηματικά»). Σε επιστολή προς τον Ερατοσθένη, φημισμένο μαθηματικό και λόγιο που διηύθυνε τότε τη Βιβλιοθήκη της Αλεξάνδρειας, αναφέρει ο μέγιστος Έλληνας μαθηματικός : *«Πολλές πεποιθήσεις αρχικά μου δημιουργούνται με κάποια μηχανική μέθοδο, έστω και αν αυτές πρέπει να αποδειχτούν με Γεωμετρία στη συνέχεια, καθότι η ανακάλυψή τους με τη μηχανική μέθοδο δε συνιστά μια αποδεκτή απόδειξη. Είναι όμως φυσικά ευκολότερο, όταν έχουμε προηγουμένως συμπεράνει κάποια απάντηση, μ' αυτή τη μέθοδο, στο ερώτημά μας, να παράξουμε την απόδειξη που θέλουμε παρά να πετύχουμε κάτι τέτοιο χωρίς καμιά προηγούμενη ένδειξη και γνώση για την απάντηση. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, στην περίπτωση των θεωρημάτων ότι - ο όγκος του κώνου και της πυραμίδας είναι το 1/3 του όγκου του κυλίνδρου και του πρίσματος αντίστοιχα που έχουν την ίδια βάση και το ίδιο ύψος - τις αποδείξεις των οποίων πρώτος έκανε ο Εύδοξος όχι μικρό μερίδιο τιμής πρέπει να αποδοθεί και στον Δημόκριτο ο οποίος ήταν ο πρώτος που τα διατύπωσε έστω και χωρίς απόδειξη.»* Όταν ο Ευκλείδης αποδεικνύει την πρόταση ότι *«Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με σταθερή περίμετρο μέγιστο εμβαδόν έχει το τετράγωνο»*, φυσικά γνωρίζει εκ των προτέρων την αλήθεια της πρότασης πειραματικά ή διαισθητικά και την αποδεικνύει. Το ίδιο ισχύει και για το Πυθαγόρειο θεώρημα: Οι Βαβυλώνιοι ανεκάλυψαν το θεώρημα του Πυθαγόρα εμπειρικά, εκατό χρόνια πριν τη γέννηση του Πυθαγόρα. Αργότερα βεβαίως, ο Πυθαγόρας το απέδειξε .

3. Ένα ανοικτό πρόβλημα

«Να εξεταστεί αν υπάρχει, ποίο είναι και γιατί, το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου που είναι εγγεγραμμένο σε δοθέν σταθερό τρίγωνο.» Αυτό το πρόβλημα εξετάζει ένα ενδεχόμενο, χωρίς την παραμικρή ένδειξη ισχύος του και ξεκινά κυριολεκτικά από μηδενική βάση.
Ερώτημα: Μπορεί να διαπραγματευθεί ευχερώς αυτό το πρόβλημα ένας μαθητής ή έστω και καθηγητής μαθηματικών χωρίς νέες τεχνολογίες;

Απάντηση: Από την διδακτική μας εμπειρία, μπορούμε να ισχυριστούμε με κάποιο σημαντικό βαθμό βεβαιότητας, ότι η απάντηση είναι «κατά κανόνα όχι». Η μη γνώση του τριγώνου που έχει αυτή την ιδιότητα, είναι πρωταρχικός, αλλά πιθανόν και αποτρεπτικός παράγων στην έναρξη της διερεύνησης, αφού ο χρόνος διαπραγμάτευσης ενός προβλήματος με τα συνήθως κρατούντα, δεν μπορεί να είναι ιδιαίτερα μεγάλος . Ο πειραματισμός με μολύβι και χαρτί δεν προσφέρεται, καθώς η φύση του προβλήματος απαιτεί πολλές μετρήσεις, μέχρι να σχηματισθεί μια πιθανώς βάσιμη εικασία. Η συνδρομή της βιβλιογραφίας, είναι μια επίσης χρονοβόρα διέξοδος. Ίσως η καταφυγή στο διαδίκτυο να είναι αποτελεσματική μέθοδος, εάν και εφ΄ όσον είναι γνωστό και λελυμένο το πρόβλημα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση, το πρόβλημα είναι διάσημο και αν θέσει κάποιος στη γνωστή μηχανή αναζήτησης Google τις λέξεις κλειδιά: «τρίγωνο», «ελάχιστη», «περίμετρος» θα το βρει ως «πρόβλημα του Fagnano». [2],[3],[4],[5] όπου επιλύεται με εφαρμογή Java. Οι συντάκτες της παρούσης εργασίας, θέλοντας να εργαστούν με το δυναμικό γεωμετρικό λογισμικό Sketchpad, αγνόησαν το διαδίκτυο, γνωρίζοντας μόνο, ότι πρόκειται για γνωστό πρόβλημα.

Η προσέγγιση με το sketchpad, συνίσταται στην κατασκευή του σταθερού τριγώνου ΑΒΓ, στην επιλογή τριών τυχαίων σημείων, ανά ένα σε κάθε πλευρά, στην μέτρηση της περιμέτρου και στην προσπάθεια ελαχιστοποίησής της, καθώς τα σημεία μετακινούνται επί των πλευρών. Στην προσπάθεια αυτή θα απεικονιστεί ως εξαρτημένη μεταβλητή y, η περίμετρος και ως ανεξάρτητες τα μήκη των διαδρομών των σημείων επί των πλευρών με αρχή κάποια κορυφή. Το αποτέλεσμα το βλέπουμε στο σχήμα 1:

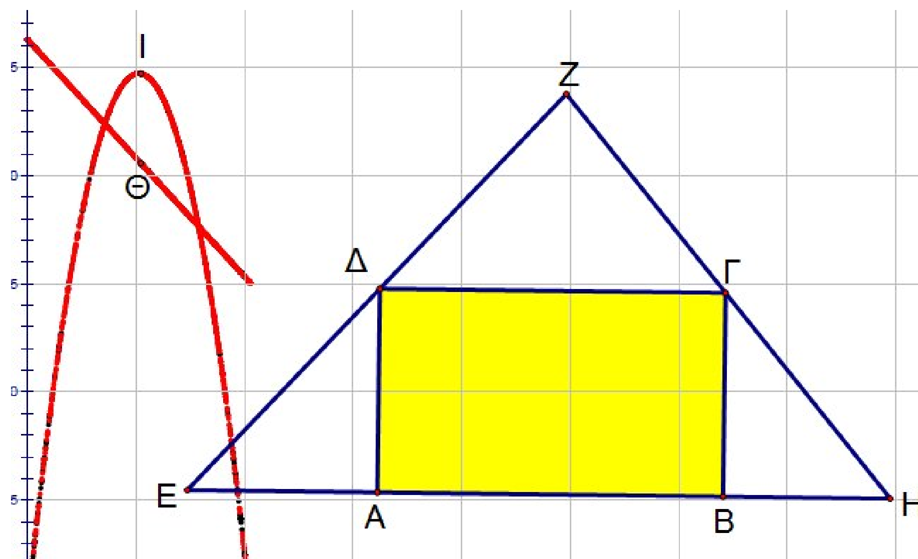


Σχήμα 1: *Το ορθικό τρίγωνο φαίνεται να είναι το ζητούμενο.*

Μέσω τις παραπάνω διεργασίας αναδεικνύονται διάφορες μαθηματικές πρακτικές, δεξιότητες και διαδικασίες, όπως:

1) Το τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου είναι το ορθικό. Η πειραματική ισχυροποίηση της εικασίας σε ειδικά τρίγωνα όπως ισοσκελές, ισόπλευρο, ορθογώνιο αμβλυγώνιο, οδηγεί στο συμπέρασμα, ότι η ύπαρξη του τριγώνου ελαχίστης περιμέτρου, έχει νόημα για οξυγώνιο τρίγωνο μόνο, καθώς (οριακά) στο ορθογώνιο και (μη οριακά) στο αμβλυγώνιο, εκφυλίζεται σε ευθεία.
2) Η εικασία για το ορθικό τρίγωνο, βασίζεται στην οπτική αντίληψη του σχήματος. Αν ως πειραματικό οπλοστάσιο έχουμε καθορίσει ένα τρίγωνο στο οποίο έχουμε αποκρύψει τα δευτερεύοντα σημεία του (για να μην είναι πολύπλοκο το σχήμα) και τα εμφανίσουμε σε μια φάση του πειραματισμού, φθάνουμε στην εικασία ευκολότερα.
3) Η προς απόδειξη πρόταση φαίνεται να διαμορφώνεται σε «Να αποδειχθεί, ότι σε κάθε οξυγώνιο τρίγωνο, το εγγεγραμμένο τρίγωνο ελαχίστης περιμέτρου, είναι το ορθικό»
4) Η σκέψη για εκλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής, καθώς μπορεί να επιλέγονται όχι μοναδικές κάθε φορά, αλλά πάντως οι κατάλληλες για την διερεύνηση της εικασίας μας.
5) Η ερμηνεία της καμπύλης ή των καμπυλών (λ.χ. γιατί το ένα σημείο διαγράφει κάποια –μάλλον- παραβολή (νέο ερώτημα-εικασία) γιατί τα άλλα σημεία διαγράφουν κατακόρυφη ευθεία.
6) Η ανάδειξη της επιστημονικής μεθοδολογίας, ότι όταν μια εξαρτημένη μεταβλητή εξαρτάται από τρεις άλλες και δεδομένου ότι εργαζόμαστε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στη μελέτη ακροτάτων, σταθεροποιούμε τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και μεταβάλουμε την τρίτη. (Δηλ. μια καθαρά επιστημονική ανακαλυπτική, πειραματική, πρακτική)
7) Η επέκταση της εικασίας για το εάν ισχύει ανάλογη πρόταση για το εμβαδόν (δεν ισχύει)
8) Η διασύνδεση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την ανάλυση, πράγμα που στα υπάρχοντα διδακτικά εγχειρίδια ουδόλως προβάλλεται και ουδόλως αναδεικνύεται αλλά και που αποτελεί το διδακτικό μέλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.[1]
9) Η αναζήτηση μιας περαιτέρω γενίκευσης, μπορεί να δημιουργήσει ένα ανάλογο πρόβλημα για εγγεγραμμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο υπό την έννοια του σχήματος 2, όπου θα αναζητηθεί ελάχιστη περίμετρος ή μέγιστο εμβαδόν

[1] Ο καθηγητής Στυλιανός Νεγρεπόντης φρονεί, ότι το μέλλον της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως μαθήματος της Δ.Ε., περνά κυρίως μέσα από την διασύνδεσή της με την Ανάλυση και με αντίστοιχη μη έμφαση στην διδασκαλία των προφανών διαισθητικά ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων(Εκφρασθείσα γνώμη σε «στρογγυλό τραπέζι» στην ημερίδα της «Επιστημονικής Ένωσης για την Διδακτική των Μαθηματικών» την 20η Δεκ. 2008 στην Πανεπιστημιούπολη Ιλισίων.) Προφανώς, ο συνδετικός κρίκος είναι η διδακτική αξιοποίηση των δυναμικών Γεωμετρικών λογισμικών.

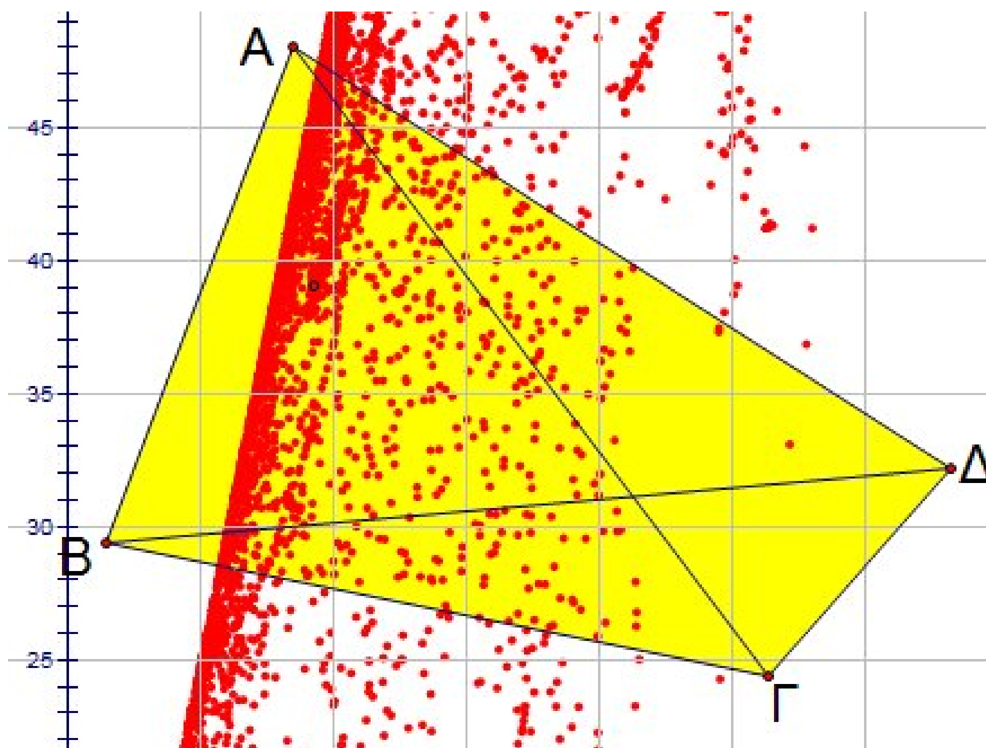


Σχήμα 2: *Το μέγιστο εμβαδόν προκύπτει στο μέσον του ΕΖ*

Είναι προφανές, ότι ως προς το μέγιστο του εμβαδού, μπορούμε να φθάσουμε στην λύση με αλγεβρικό τρόπο (μη αρνητικό πρόσημο διακρίνουσας κτλ) ή με Ανάλυση (ρίζα πρώτης παραγώγου) ωστόσο, η διερεύνηση με το sketchpad, αφού υποδεικνύει ως λύση το Δ στο μέσον του ΕΖ, μπορεί να οδηγήσει και σε καθαρά Ευκλείδεια αντιμετώπιση, όπου κάθε άλλο ορθογώνιο να αποδειχθεί ότι έχει μικρότερο εμβαδόν από το ευρεθέν (κυριολεκτικώς, από το βασίμως εικαζόμενο) . Ως προς το ερώτημα της περιμέτρου, φαίνεται, και από το δυναμικό χειρισμό του σχήματος, ότι έχω μια γραμμική μεταβολή μεταξύ του διπλασίου της πλευράς ΕΖ και του διπλασίου του αντιστοίχου ύψους της. Στη θέση μέγιστου εμβαδού, έχομε θέση μέσης τιμής ελαχίστης και μεγίστης περιμέτρου πράγμα που φαίνεται από το σχήμα του γραφήματος.

Ένα άλλο, επίσης ενδιαφέρον γνωστό πρόβλημα (χρησιμοποιήθηκε ως υπόδειγμα στην πιστοποίηση β΄ επιπέδου το Νοέμβριο του 2008) μπορεί να εισαχθεί με την ανοικτή διατύπωση «Να εξετασθεί, πώς το εμβαδόν τετραπλεύρου εξαρτάται από τα μήκη των πλευρών των διαγωνίων του»

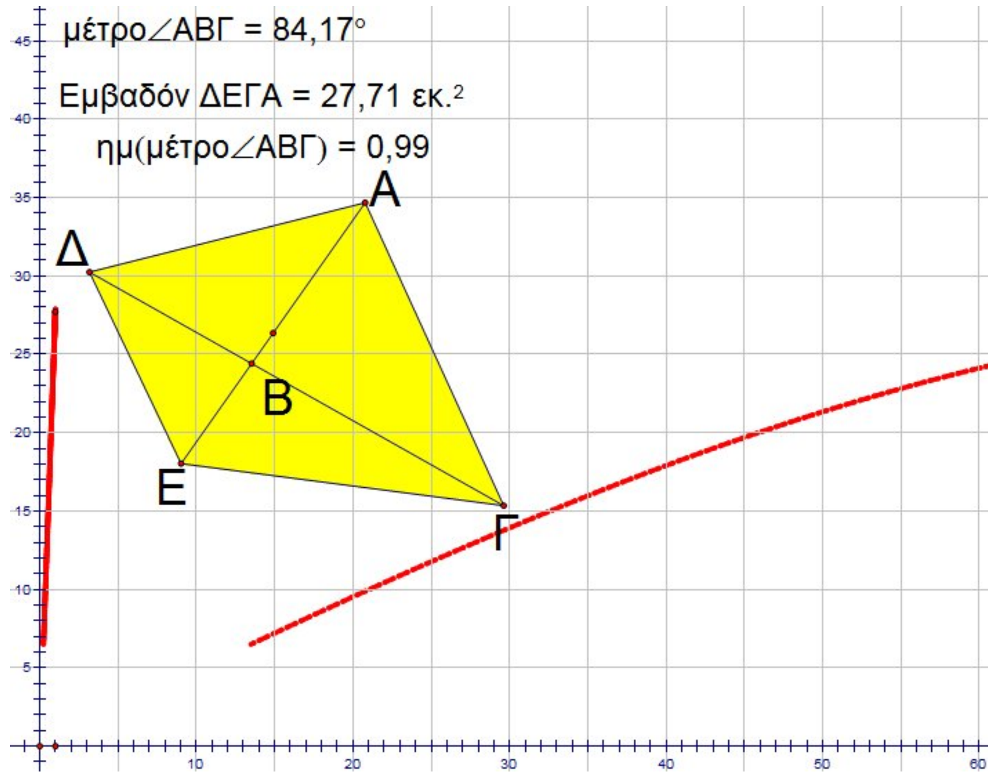
Στην διαπραγμάτευσή του, χρησιμοποιώντας ως ανεξάρτητη μεταβλητή το μήκος μιας των διαγωνίων (της ΑΓ) και ως εξαρτημένη το εμβαδόν, έχομε το παρακάτω



Σχήμα 3: *Το νέφος των σημείων συγκεντρώνεται σε μια γωνία.*

σχήμα 3, όπου καθώς το σημείο Γ διαγράφει το επίπεδο, ενώ όλα τα άλλα παραμένουν σταθερά, το εμβαδόν του σχήματος παίρνει τιμές σε μια γωνία. Η ερμηνεία του αποτελέσματος είναι γόνιμη μαθηματικά, αφού φαίνεται, ότι το εμβαδόν, δεν είναι μονότιμη αντιστοίχιση του μήκους της ΑΓ, αλλά πλειότιμη . Η παρατήρηση ότι οι μέγιστες τιμές επιτυγχάνονται όταν $ΑΓ \perp ΒΔ$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει και μια άλλη μεταβλητή που επειδή δίνει μέγιστο για δεδομένο μήκος της ΑΓ σε κάθετη θέση με την ΒΔ, τότε αυτό είναι η γωνία των διαγωνίων και μάλιστα το ημίτονό της. Με ένα άλλο δυναμικό χειρισμό (σχήμα 4), όπου αυτή τη φορά η ΑΓ μένει σταθερή σε μήκος και περιστρέφεται, παίρνουμε δύο γραφήματα ανάλογα με την μεταβλητή ω (καμπύλη) ή ημω (ευθεία με την μεγάλη κλίση) γύρω από αυτή την διαδικασία μπορούν να αναπτυχθούν ενδιαφέρουσες συζητήσεις-επιχειρήματα για το ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης του εμβαδού (ορθότητα ενός τύπου από άποψη διαστάσεων) γιατί πρέπει ο τύπος να είναι συμμετρικός ως προς τις διαγωνίους, πώς θα παρακαμφθεί το εμπόδιο της

απεικόνισης ενός σημείου εκτός επιφάνειας εργασίας (π.χ. διαίρεση της εξαρτημένης μεταβλητής λ.χ. με το 10 ή επιλογή μη κανονικού συστήματος ορθογωνίων αξόνων και αν πρέπει να είναι κανονικό) βεβαίως, με καθοδηγούμενη
ανακάλυψη και περιορίζοντας το ανοικτόν του προβλήματος μπορεί κάποιος να



Σχήμα 4: *Τα διάγραμμα με μεταβλητή το ημφ και την φ*

φθάσει πιο σύντομα στον τύπο Ε=$\frac{1}{2}\delta_1\delta_2$ημω

4. Ένα πρόβλημα σύνδεσης Ανάλυσης με Γεωμετρία: [6]

«Να κατασκευασθεί συνάρτηση $f\ :\ [0,1)\to[0,\infty)$ που να είναι 1-1 και επί» Αυτό είναι ένα πρόβλημα που ανάλογό του δεν υπάρχει στα εγχειρίδια Δ.Ε. Το λογισμικό sketchpad, έχει την δυνατότητα, να παρουσιάζει συγχρόνως Γεωμετρικά σχήματα και γραφική παράσταση συνάρτησης με μεταβλητές, μεγέθη του σχήματος. Άρα, ένας τρόπος προσέγγισης, μπορεί να γίνει μέσω του γεωμετρικού μοντέλου του σχήματος 5, όπου έχω ένα τετράγωνο ΑΗΔΕ, το Ζ κινείται στην διαγώνιο ΑΔ η προβολή Β του

Ζ κινείται στο [0,1) (ΑΗ)=1 και το Γ που είναι η εικόνα του Β, μέσω αυτής της απεικόνισης, στο $[0,\infty)$. Ο τύπος της προς εύρεση συναρτήσεως, προκύπτει από τα όμοια ορθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ και ΖΒΓ, όπως και από τα όμοια ορθ. τρίγωνα ΑΗΔ και ΑΒΖ , όπου αν $(\mathrm{AB}) \equiv \chi \quad \kappa\alpha\iota \quad (\mathrm{A\Gamma}) \equiv f(\chi)$, τότε μετά από πράξεις έχω ότι $f(\chi)=\dfrac{\chi}{1-\chi}$, ένα αποτέλεσμα, που προκύπτει από (εύκολη) γεωμετρική οδό. Να σημειωθούν και τα εξής:

Σχήμα 5: *Το υπόδειγμα απεικόνισης ευθυγράμμου τμήματος σε ημιευθεία.*

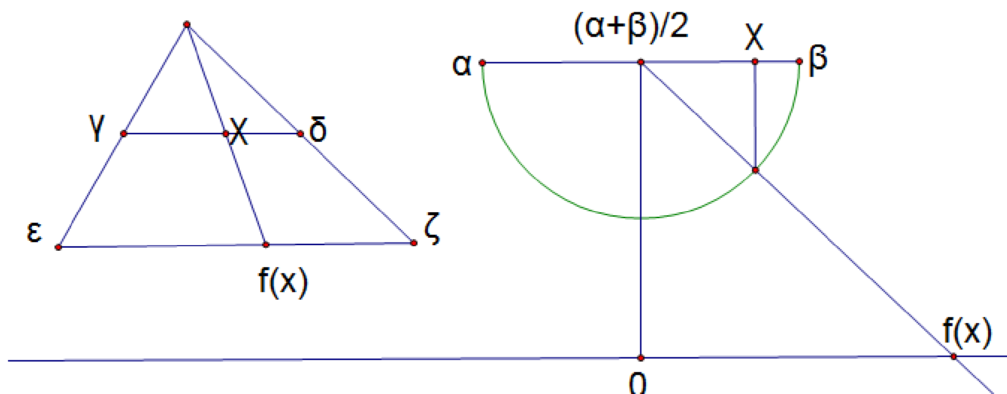
α) Το ίδιο το (δυναμικό) σχήμα είναι η παράσταση της συνάρτησης που παριστάνεται και στο ορθογώνιο σύστημα και της οποίας βρήκαμε τον τύπο με καθαρά γεωμετρική μέθοδο (τριπλή αναπαράσταση της *f*)

β) Στη θέση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΔ, μπορούμε να φανταστούμε το γράφημα οποιασδήποτε συνάρτησης που είναι αύξουσα και συνεχής στο διάστημα [0,1) με φ(0)=0 και φ(1)=c (c=1 για το τετράγωνο, αλλά μπορεί να έχω και ως ΑΗΔΕ οποιοδήποτε ορθ. παραλ/μο) Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνομε μια απεριόριστη κλάση παραδειγμάτων , με μικρή μόνο τροποποίηση του μοντέλου.

γ) Το αποτέλεσμα $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$, έχει μια σπουδαία γεωμετρική εποπτεία.

δ) Ομοίως εξαιρετική εποπτεία αποκτά και η έννοια της αντίστροφης συνάρτησης.

ε) Πέραν του ανωτέρω μοντέλου υπάρχουν και ανάλογα (απλά) όπως τα παρακάτω μοντέλα συναρτήσεων (σχήμα 6) 1-1 και επί f : [γ,δ]→[ε,ζ] ή φ: (α,β)→ και τα οποία αναδεικνύουν κάποιες -μη προφανείς- πτυχές σύνδεσης της



Σχήμα 6: *Δύο υποδείγματα απεικονίσεων, ευθυγράμμου τμήματος σε ευθ. τμήμα καθώς και ευθ. τμήματος σε ευθεία.*

Ανάλυσης και της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και κάθε ένα από τα οποία μπορεί να τροποποιηθεί καταλλήλως (όπως και το αρχικό) και να παράξει απειρία παραδειγμάτων συναρτήσεων με δεδομένα πεδία ορισμού και τιμών.

5. Γενικότερα συμπεράσματα

α) Η διερμηνεία των πειραματικών αποτελεσμάτων, φέρνει στην επιφάνεια άλλες μαθηματικές δεξιότητες, οι οποίες είναι πρωτόγνωρες για τους μαθητές της ΔΕ , πλην όμως τους εμπλέκουν στη λογική της έρευνας και ισχυροποίησης μιας εικασίας . Η αναγκαιότητα και μιας τέτοιας προσέγγισης, είναι προφανής, δεδομένου ότι απουσιάζει εντελώς από την ΔΕ . Τα υπάρχοντα λογισμικά προσομοίωσης σε άλλα μαθήματα (λ.χ. το modellus στη Φυσική) καλύπτουν μέρος αυτής της ανάγκης.

β)Το πείραμα, ιδίως για την περίπτωση της Γεωμετρίας, ίσως δεν πρέπει να χαρακτηρίζεται ως «εικονικό» αφού τα χειριζόμενα αντικείμενα είναι «πραγματικά» μαθηματικά αντικείμενα, σε σχέση με τα κατά κυριολεξίαν εικονικά πειράματα φυσικής ή χημείας με τα αντίστοιχα λογισμικά, (πλην ίσως προβλημάτων κινηματικής)

γ) Η ενοποιός έννοια της συνάρτησης μεταξύ Ευκλειδείου Γεωμετρίας και Ανάλυσης, σε συνδυασμό με τις πολλαπλές αναπαραστάσεις της, μέσω των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών, τείνει στον πυρήνα του γνωστού αφορισμού «Μαθηματικά= απεικονίσεις» χωρίς να απομακρύνεται από τον πυρήνα του άλλου γνωστού αφορισμού «Μαθηματικά = απόδειξη»

δ)Τα δυναμικά λογισμικά της Γεωμετρίας, έχουν σχεδιασθεί πάνω στις πλέον σύγχρονες θεωρίες διδακτικής, και συγκεκριμένα στον κοστρουκτιβισμό, όπου ο

μαθητής κατασκευάζει την γνώση. Θεωρούμε, ότι ο πειραματισμός, όπως νοείται στα ήδη παρουσιασθέντα, συνιστά μια καινοτομία (με πανάρχαια όμως καταβολή) καθώς όντως οι «μηχανικές μέθοδοι» του Αρχιμήδους, συνιστούν την αφετηρία κάθε Γεωμετρικής ανακάλυψης και αξίζει η εισαγωγή του στην ΔΕ, αφού φέρνει κοντύτερα τον μαθητή στην παραγωγή παρά στην αναπαραγωγή της γνώσης.

6. Βιβλιογραφικές-Διαδικτυακές αναφορές:

[1] Lakatos Imre: «Αποδείξεις και Ανασκευές»-*Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης*. Εκδόσεις Τροχαλία.1996 Αθήνα

[2] http://users.sch.gr/limpikis/eucli/isometries/reflection/pro3reflection.htm

[3] http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Fagnano.shtml

[4] http://mathworld.wolfram.com/FagnanosProblem.html

[5] http://demonstrations.wolfram.com/FagnanosProblem/

[6] Πλατάρος Γιάννης:*«Γεωμετρικά πρότυπα συναρτήσεων»* Πρακτικά 21ου Συνεδρίου ΕΜΕ Τρίκαλα, Νοέμβριος 2004. Διατίθεται και εδώ: http://homepages.pathfinder.gr/plataros/EMETrikala1.pdf

Γιάννης Π. Πλατάρος 25/4/2004

ΕΡΓΑΣΙΑ: «Η συμβολή του Θαλή στην Γεωμετρία»



Η ζωή του Θαλή

Ο Θαλής γεννήθηκε το 624 π.Χ. στη Μίλητο και υπήρξε ιδρυτής της Ιωνικής σχολής (σχολή της Μιλήτου). Ο Θαλής αγαπούσε τα ταξίδια και ταξίδεψε πολύ. Οι σοφοί του 6ου αιώνα (λ.χ. ο Σόλων) ήταν καθιερωμένο να ταξιδεύουν στην Αίγυπτο και να μελετούν τον τρόπο ζωής και τις επιστήμες (γεωμετρία) των Αιγυπτίων. Ο Θαλής ήταν ένας απ' τους επτά σοφούς της αρχαιότητας και θεωρείται πατέρας της Ελληνικής φιλοσοφίας διότι πρώτος έθεσε το πρόβλημα μίας γενικής αρχής όλων των πραγμάτων. Ο Θαλής πέθανε σε προχωρημένη ηλικία παρακολουθώντας αθλητικούς αγώνες εξαιτίας της ζέστης, της δίψας και της εξάντλησης. Στον τάφο του χαράκτηκε το εξής επίγραμμα : Αυτός ο μικρός τάφος, είναι του Θαλή του εξαίρετου, που η δόξα έφτανε ως τα ουράνια.

Η συμβολή του Θαλή στην Γεωμετρία

Δυστυχώς , οι γνώσεις μας για τα μαθηματικά που ανεπτύχθησαν τον 6^o και 5^o αιώνα π.Χ.είναι αποσπασματικές. Κανένα κείμενο δεν διασώζεται ακέραιο , ενώ οι πληροφορίες ου έχουμε προέρχονται από συγγραφείς που έζησαν έως και 1000 χρόνια αργότερα.

Ο Πρόκλος αποτελεί την καλύτερη και την πλέον αξιόπιστη πηγή για τον Θαλή ως Γεωμέτρη

Παρ΄ ότι ο Πρόκλος έζησε τον 5^o μ.Χ αιώνα , η επισκόπηση της Ιστορίας της Γεωμετρίας που περιέλαβε στα σχόλιά του για το πρώτο βιβλίο του Ευκλείδη,

είναι αξιόπιστη, καθώς θεωρείται ότι βασίζεται στην χαμένη Ιστορία της Γεωμετρίας που είχε συγγράψει ο μαθητής του Αριστοτέλη ο Εύδημος ,

. Σύμφωνα με τον Πρόκλο, ο Θαλής μετέβη στην Αίγυπτο , από όπου εισήγαγε την μελέτη της Γεωμετρίας στην Ελλάδα.Αυτή την πληροφορία όμως, πρέπει να την δούμε μέσα από την οπτική του ότι στην Αίγυπτο ουδέποτε υπήρξε μελέτη της Γεωμετρίας όπως την εννοούμε σήμερα, αφού στα σχήματα που καμιά φορά συναντούμε σε Βαβυλωνιακές πινακίδες ή Αιγυπτιακούς παπύρους, ο ρόλος τους είναι εντελώς επουσιώδης και η χρησιμότητά τους περιορίζεται στην σημείωση πάνω τους λ.χ.του μήκους μιας πλευράς τριγώνου.Με τον Θαλή , αλλά και τους επιγόνους της σχολής της Ιωνίας, **το σχήμα παίρνει ουσιαστικό και πρωτεύοντα ρόλο στην σπουδή της γεωμετρίας και γίνεται το ίδιο , αντικείμενο μελέτης και μαθηματικού στοχασμού.**

Επίσης η Γεωμετρία καθίσταται συμπερασματική επιστήμη

Δικαίως λοιπόν εξασφάλισε τον τίτλο του «Πατέρα της Γεωμετρίας», αφού :

- Σύμφωνα με τον Ιερώνυμο (Μαθητής του Αριστοτέλη) όπως μας εξιστορεί ο Διογένη Λαέρτιος:

«Κατόρθωσε να μετρήσει τις πυραμίδες παρατηρώντας το μήκος της σκιάς τους , κατά την στιγμή που οι σκιές μας έχουν μήκος ίσο με το ύψος μας»

- Ο Ηράκλειτος γράφει :

"Θαλής πρώτος αστρολογήσαι".

- Ο Πλίνιος

Μας λέει τα ίδια, προσθέτοντας ότι ο Θαλής χρησιμοποίησε την μέθοδο και για κάθε άλλο σώμα του οποίου θέλουμε να βρούμε το ύψος

- Ο Πλούταρχος εμπλουτίζει την προηγούμενη ιστορία, βάζοντας τον τον Νειλόξενο να απευθύνεται στον Θαλή λέγοντάς του:

«Μεταξύ των άλλων άθλων σου, αυτός που ικανοποίησε ιδιαίτερα εκείνος (δηλ. τον Φαραώ Άμασι), όταν χωρίς δυσκολία και χωρίς να χρησιμοποιήσεις οποιοδήποτε όργανο, τοποθέτησες απλώς μια ράβδο στο άκρο της σκιάς της πυραμίδας και, έχοντας έτσι σχηματίσει δύο τρίγωνα μέσω του ίχνους των ακτίνων του Ηλίου, απέδειξες ότι η πυραμίδα έχει προς την ράβδο, τον ίδιο λόγο που έχει η σκιά της προς την σκιά της ράβδου.»

Πρέπει να επισημανθεί , ότι η εκδοχή του Πλούταρχου φανερώνει μια υποτυπώδη (τουλάχιστον) γνώση ομοίων τριγώνων.

- Σύμφωνα με τον Πρόκλο

Ο Ευκλείδης είναι ο πρώτος που απέδειξε πως ένας κύκλος διχοτομείται από την διάμετρό του

Σύμφωνα επίσης με την παράδοση , είναι ο πρώτος που απέδειξε ότι οι παρά την βάση γωνίες ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. (ή «όμοιες» όπως τις έλεγαν σύμφωνα με τον αρχαϊκό όρο της εποχής του)

- Ο Εύδημος:

Μας πληροφορεί ότι η Ι.26 Πρόταση του Ευκλείδη (κριτήριο ΓΠΓ για ισότητα τριγώνων) την απέδειξε (ή τουλάχιστον το εγνώριζε) αφού –κατά τον Εύδημο- ο τρόπος υπολογισμού της απόστασης πλοίου από την ακτή , «εμπλέκει κατ΄ανάγκην την χρήση αυτού του θεωρήματος»

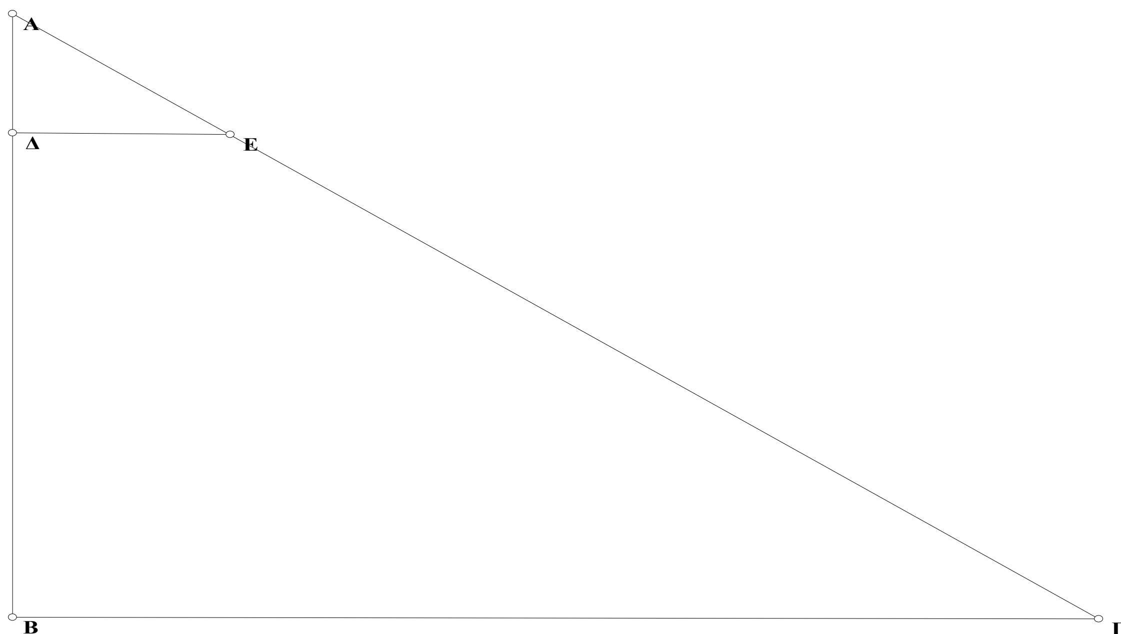
Επίσης ο Εύδημος αποδίδει στον Θαλή την Ι.15 του Ευκλείδη (ισότητα των κατά κορυφήν γωνιών)

- Σύμφωνα με την Παμφίλη:

Υπήρξε ο πρώτος που ενέγραψε ορθογώνιο τρίγωνο σε κύκλο . Σύμφωνα όμως με τον Απολλόδωρο τον λογικιστή , αυτό πρέπει να αποδοθεί στους Πυθαγορείους.
Σύμφωνα όμως με τον Cantor , ο Θαλής δεν «απέδειξε» αλλά μάλλον παρετήρησε τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχηματών. Ο Cantor μάλιστα προχωρεί και εικάζει ότι ο Θαλής πρέπει να ανεκάλυψε τα θεωρήματά του που αναφέρονται είτε στην ισότητα των κατά κορυφήν γωνιών είτε στην διχοτόμηση του κύκλου υπό διαμέτρου του, στο γεγονός ότι σχήματα κύκλων διαιρεμένα σε ίσους τομείς από 2, 4 ή 6 διαμέτρους υπήρχαν πάμπολλα στην Αίγυπτο σε μνημεία και αμφορείς.

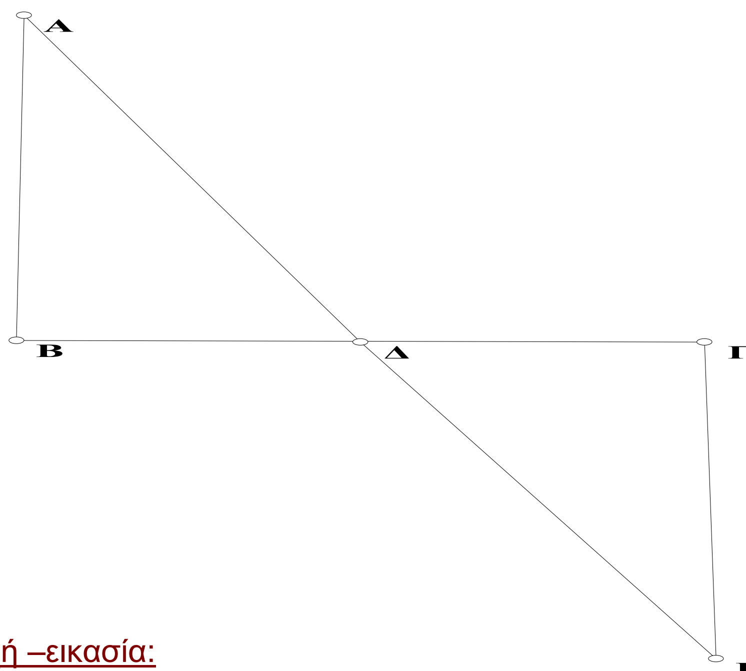
Σχετικά με το πρόβλημα προσδιοριμού της απόστασης πλοίου από την ακτή.

Σύμφωνα με τον Εύδημο η Ι.26 του Ευκλείδη ήταν γνωστή στον Θαλή από το ότι ήταν σε θέση να προσδιορίσει την απόσταση πλοίου από την ακτή.Επ΄αυτού υπάρχουν τρεις ενδιαφέρουσες εικασίες σχετικά με την πραγματική μέθοδο που χρησημοποιούσε ο Θαλής.
$1^{η}$ Εκδοχή –εικασία:
Ο Θαλής εγνώριζε κριτήριο μόνο τα όμοια τρίγωνα και δεν χρησιμοποιούσε το κριτήριο για τα ίσα. Έτσι, ανεβαίνοντας σε ένα ψηλό σημείο της ακτής , λ.χ. το Α , έχοντας μαζί του ένα μικρό αρθρωτό τρίγωνο λ.χ. το ΑΔΕ, σημάδευε το τρίγωνο με την ΑΕ και το οποίο ευρίσκετο στην θέση Γ. Έτσι γνωρίζοντας τα μήκη ΑΔ , ΔΒ και μετρώντας το ΔΕ , μπορούσε να υπολογίσει το ζητούμενο ΒΓ , μέσω της σχέσης:
$$ΒΓ=\frac{ΔΕ(ΑΔ+ΔΒ)}{ΑΔ}$$



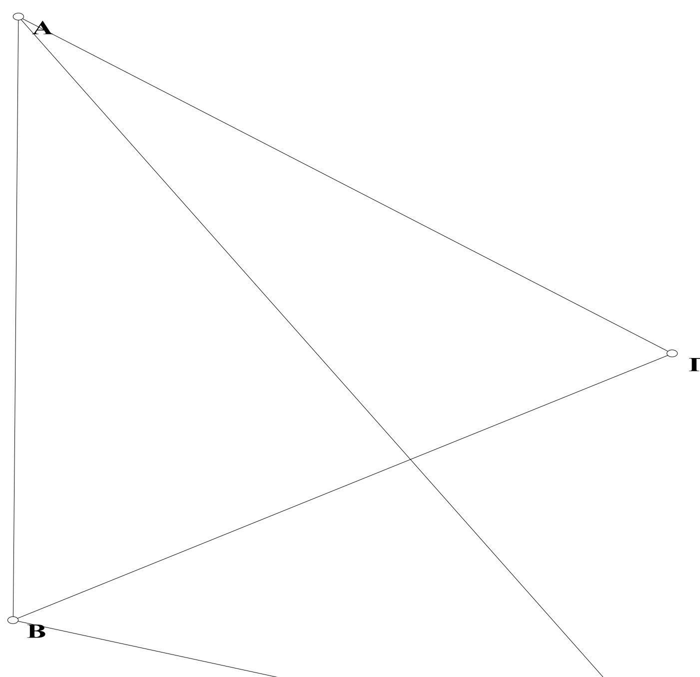
$2^{η}$ Εκδοχή- εικασία:

Σύμφωνα με αυτήν , σε επίπεδη ακτή, το πλοίο είναι στην θέση Α. Εμείς στεκόμαστε στο Β , κάθετα στην ακτογραμμή.Από εκεί μετράμε αυθαιρέτως ένα μήκος ΒΔ επί της ακτογραμμής και παίρνουμε άλλο τόσο στην προέκταση , το ΔΓ. Ακολούθως , κάθετα, αρχίζουμε να μετράμε απόσταση σκοπεύοντας το σημείο Δ, μέχρις ότου έλθει συνευθειακά με το πλοίο Α. Έτσι, ΗΓ =ΑΒ με βάση το προειρηθέν κριτήριο.



3η Εκδοχή –εικασία:

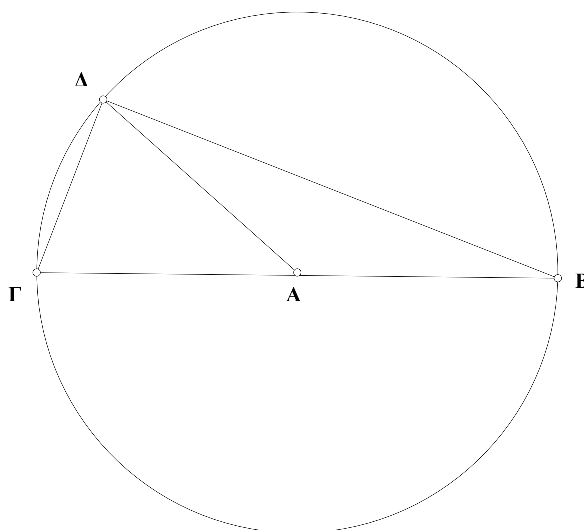
Σύμφωνα με αυτήν , η διαδικασία είναι απλούστατη και ευφυέστατη ταυτοχρόνως. Ο Παρατηρητής, το μόνο που είχε να κάνει, ήταν να ανέβει σε ένα ψηλό σημείο της ακτής και με μία απλή ράβδο να σκοπεύσει το πλοίο. Στο προσοφθάλμιο άκρο Α έχει αναρτήσει ένα νήμα της στάθμης και έτσι μετρά την γωνίαΒΑΓ Ακολούθως , χωρίς μεταβολή της γωνίας, στρέφει την ράβδο επί της ακτής και σκοπεύει ένα προσιτό σημείοΕ.Τότε με βάση την Ι.26, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΕ είναι ίσα και επομένως ΒΓ=ΒΕ



Από τις τρεις πάρα πάνω εκτεθείσες εκδοχές, είναι αρκετά δύσκολο να λάβει κάποιος θέση και να υποδείξει την επικρατέστερη ή πιθανότερη. Η τρίτη εκτεθείσα όμως, μας επιτρέπει να εκφράσουμε την σκέψη ότι προσιδιάζει στην ευφυΐα σοφία και (συνακόλουθη) απλότητα του Θαλή.

Το άθροισμα των γωνιών τριγώνου

Έχει εκφρασθεί η άποψη ,ότι ο Θαλής εγνώριζε ότι το άθροισμα των γωνιών παντός τριγώνου είναι 2 ορθές. Σύμφωνα με την Παμφίλη , ενέγραψε ορθογώνιο τρίγωνο σε κύκλο. Όμως επειδή εγνώριζε την ισότητα των παρά την βάση γωνιών ισοσκελούς τριγώνου, μπορούσε εύκολα να αποδείξει ότι το άθροισμα των γωνιών ορθογωνίου τριγώνου είναι 2 ορθές, ιδού πως:



Η ΑΔ χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα, τα ΑΔΓ και ΑΔΒ . Το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου επομένως, ισούται με το άθροισμα των τεσσάρων ίσων παρά την βάση γωνιών.<ΑΔΓ +< ΑΔΒ= 1 ορθή. Άρα και οι ίσες τους <Β +<Γ=1 ορθή ,δηλαδή όλες έχουν άθροισμα 2 ορθές. Κατόπιν αυτού, είναι εύκολο, ένα τυχαίο τρίγωνο να χωρισθεί με ένα ύψος του σε δύο ορθογώνια και με βάση το προηγούμενο , να αποδειχθεί ότι έχει άθροισμα γωνιών 2 ορθές.

Άλλες αναφορές στο έργο του Θαλή:

Ο Θαλής ήταν ο πρώτος Έλληνας φιλόσοφος που αναζήτησε την πρώτη αρχή των όντων και των κοσμικών φαινομένων. Ως πρώτη αιτία όρισε το νερό. Η ζωτική δύναμη του νερού και η τεράστια σημασία του στη φύση ήταν η αιτία που έκανε τον Θαλή να το ορίσει ως πρωταρχικό στοιχείο. Στην Ορφική μυθολογία βρίσκουμε το "Ύδωρ" και την "Ύλη" σαν τα πρωταρχικά στοιχεία δημιουργείας της πρωτοϋλης του σύμπαντος. Η "Ύλη" δεν ορίζεται με την σημερινή επιστημονική έννοια, αλλα αποτελεί μια μορφή κοσμικής ύλης. Το νερό, ο αέρας είτε άλλο στοιχείο είναι κατά τους Προσωκρατικούς φιλοσόφους συνυφασμένο με την ζωή, την ψυχή και τη δύναμη της φύσεως που κινεί τα πάντα («φύεσθαι»).

Ο Ηρόδοτος
αναφέρει πώς ο Θαλής συνόδευσε τον Κροίσο σε εκστρατεία του και με κατάλληλη διοχέτευση των νερών του ποταμού Αλύ διευκόλυνε τα στρατεύματά του στη διάβαση τους. Ο Θαλής προείπε την έκλειψη ηλίου το 585 π.Χ., και έγραψε επικούς στίχους για τα ουράνια σώματα.
Ο Διογένης Λαέρτιος
γράφει για τον Θαλή στο 1ο Βιβλίο του : "Κάποιοι λένε ότι πρώτος αυτός είπε πως οι ψυχές είναι αθάνατες. Ένας απ' αυτούς είναι ο ποιητής Χοιρίλος. Πρώτος βρήκε την πορεία του ήλιου από ηλιοστάσιο σε ηλιοστάσιο και διατύπωσε την άποψη πως το μέγεθος του ήλιου και της σελήνης είναι ίσο με τον ένα επτακοσιοστό της τροχιάς του. Πρώτος ονόμασε την τελευταία μέρα του μήνα τριακοστή και πρώτος, όπως λένε μερικοί, ασχολήθηκε με τη φύση.
 Ως πολιτικός επίσης υπήρξε διαπρεπής. Όταν ο Κροίσος έστειλε πρέσβεις στους Μιλήσιους για να ζητήσει συμμαχία, ο Θαλής τους εμπόδισε. Πράγμα το οποίο μετά την επικράτηση του Κοίρου αποδείχτηκε σωτήριο για την πόλη. Πρωταρχική αιτία όλων θεωρούσε το νερό και για τη φύση έλεγε πως είναι έμψυχη και γεμάτη θεότητες. Λένε πως αυτός βρήκε τις εποχές του χρόνου και τον διαίρεσε σε τριακόσιες εξήντα πέντε μέρες". (Διογένης Λαέρτιος «Βίοι Φιλοσόφων»)
Ο Πλάτων στον Θεαίτητο (174 α)
περιγράφει την παρακάτω ιστορία για τον Θαλή " όπως ακριβώς, Θεόδωρε λέγεται ότι μία πνευματώδης και νόστιμη θρακιώτισσα υπηρέτρια πείραξε τον Θαλή, που καθώς παρατηρούσε τ' άστρα και χάζευε προς τα πάνω έπεσε σ' ένα πηγάδι, του είπε δηλαδή ότι τον έτρωγε η επιθυμία να μάθει τι βρίσκεται στον ουρανό, αλλά του ξέφυγε ό,τι βρισκόταν πίσω του και πλάι στα πόδια του."
Ο Θαλής δεν πρέπει να άφησε κανένα έργο παρά μόνο ένα με τίτλο "Ναυτική αστρολογία" που σύμφωνα με το Διογένη Λαέρτιο είναι έργο του Φώκου του Σάμιου. Πολλά κομμάτια από την φιλοσοφία του διέσωσαν οι μαθητές του και οι μετέπειτα φιλόσοφοι όπως ο Αριστοτέλης (Περί Ψυχής). Σημαντικά στοιχεία για την φιλοσοφία του Θαλή βρίσκουμε στο έργο του Διογένη Λαέρτιου "Βίοι Φιλοσόφων" (Βιβλίο 1ο).

Γιάννης Π. Πλατάρος 25/4/2004

Γνωμικά αποδιδόμενα στον Θαλή

(Διογένης Λαέρτιος, "Βίοι Φιλοσόφων", Βιβλίο Ι)

- Το παλαιότερο από τα όντα είναι ο Θεός, διότι είναι αγέννητος.
- Το ωραιότερο δημιούργημα είναι ο κόσμος, διότι είναι έργο Θεού
- Το μεγαλύτερο ο χώρος, διότι χωράει τα πάντα
- Το γρηγορότερο ο νους, διότι τρέχει παντού.
- Το ισχυρότερο η ανάγκη, διότι κυριαρχεί σε όλα.
- Το σοφότερο ο χρόνος, διότι ανακαλύπτει τα πάντα.
- Ό,τι προσφέρεις στους γονείς σου, τα ίδια περίμενε να πάρεις από τα παιδιά σου.
- Ο Θάνατος δεν διαφέρει σε τίποτα από τη ζωή.
- Γνώθι σ' αυτόν.

(Σ' αυτόν που τον ρώτησε τι δημιουργήθηκε πιο μπροστά η μέρα ή η νύχτα, είπε:

- "Η νύχτα μία μέρα νωρίτερα".

Σ' αυτόν που τον ρώτησε ποιος είναι πιο ευτυχισμένος είπε

- "Αυτός που έχει σώμα υγιές, εφευρετικό μυαλό και έμφυτη ικανότητα να δεχτεί τη μόρφωση".

Σ' αυτόν που τον ρώτησε τι είναι εύκολο είπε:

- "Το να δίνεις συμβουλές στους άλλους".

Αριστοτέλης, "Μετά τα Φυσικά" (7)
" Ο Θαλής διατύπωσε την άποψη ότι η γη στηρίζεται πάνω σε νερό και ότι όλα είναι νερό."

Αριστοτέλης, "Περί Ψυχής" (7)
"Φαίνεται ότι ο Θαλής, απ' όσα θυμούνται μερικοί, θεωρούσε ότι η ψυχή έχει μέσα της δύναμη κινητική, για το λόγο ότι κινεί τον σίδηρο."

Αριστοτέλης, "Περί Ψυχής" (7)
" Και μερικοί λένε ότι (η ψυχή) είναι αναμεμειγμένη με το σύμπαν, γι' αυτό ίσως και ο Θαλής πίστευε ότι ο κόσμος είναι γεμάτος Θεούς"

Καλλίμαχος, Ίαμβος Ι (7)

γιατί η νίκη ήταν του Θαλή,
που το μυαλό του έκοβε πολύ
και λένε πως τ' αστεράκια μέτρησε της Άμαξας, (μικρή Άρκτος)
που τους Φοίνικες βοηθάει ν' αρμενίζουν (αποσ. 191)

Βιβλιογραφία:

1) «Η Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» Sir Thomas Heath –Έκδοση ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ. Αθήνα 2001
2) Ιστορία των Επιστημών και της Τεχνολογίας -ΟΕΔΒ -Αθήνα 1999
3) Ιστορία των Μαθηματικών –Ε. Σ. Σταμάτη –ανάτυπο – Αθήνα 1971
4) Αι Επιστήμαι εν Ελλάδι- Ευάγγελου Σταμάτη -Αθήνα 1966
5) Οι μεγάλοι έλληνες της Αρχαιότητος , Ο ΘΑΛΗΣ Ο ΜΙΛΗΣΙΟΣ-Ε. Σταμάτη –Ανάτυπον
6) Διογένης Λαέρτιος, Βίοι Φιλοσόφων
Άπαντα,Βιβλίο I, Θαλής
Μετάφραση : Μεταφραστική Ομάδα Κάκτου
Εκδόσεις Κάκτος (Αθήνα 1994)
7) G.S. KIRK - J.E. RAVEN - M. SCHOFIELD, Οι Προσωκρατικοί Φιλόσοφοι, Θαλής (σελ 89 - 109)
Μετάφραση: Δημοσθένης Κούρτοβικ
Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης (Αθήνα 1990)
8) Εγκυκλοπαίδεια Δομή,
Τόμος 6 Θαλής ο Μιλήσιος
Εκδόσεις "ΔΟΜΗ" Ελλάς

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

Λογική σύνδεση των προτάσεων 1-26 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη (με αναφορές σε κρυφές κοινές έννοιες κι αξιώματα)

Λογική συνάρτηση των προτάσεων 1-26

Ουδέτερη Γεωμετρία

Με τον όρο αυτό , δηλ. ουδέτετερη ή απόλυτη Γεωμετρία, εννοούμε τις προτάσεις 1-28 του πρώτου βιβλίου του ευκλείδη, οι οποίες, είναι ανεξάρτητες από το περίφημο πέμπτο αίτημα των στοιχείων. Πιο συγκεκριμένα, οι προτάσεις 1-26, αποτελούν την λεγομένη γεωμετρία των σημείων, γραμμών γωνιών και τριγώνων.
Παραθέτουμε παρακάτω τους 23 ορισμούς (όρους) , τα 5 αξιώματα (Αιτήματα) και τις 26 προτάσεις από το πρωτότυπο κείμενο θέτοντας μόνο τις επικεφαλίδες. Ανάμεσα στις κοινές έννοιες 4 και 5 παρεμβάλονται εντός αγκυλών και τρεις άλλες που υπάρχουν στην έκδοση Βαρλαάμ -Δασυποδίου , αλλάξαμε όμως την αρίθμηση. Η κοινή έννοια 9 εμφανίζεται στην Ι.4. και παρατίθεται επίσης.

Όροι (Ορισμοί)

1. Σημεῖό ν ἐστιν, οὗ μέρος οὐ θέν.
2. Gramm¾ dὲ μῆκος ἀπλατές.
3. GrammÁj dὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥ τις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
5. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
6. 'Epifane.aj dὲ πέρατα γραμμαί.
7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥ τις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.
8. 'Ep.pedoj dὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.
9. “Otan dὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.
10. “Otan dὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.
11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.
12. Oxe‹a dὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

13. Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

16. Kšntron dὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

17. Di£metroj dὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

18. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. kšntron dὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

19. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, tr.pleura mὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, tetr£pleura dὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, polÚpleura dὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

20. Tîn dὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, „soskelὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, skalhnÕn dὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

21. ”Eti dὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ¢mblugènion dὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, Ñxugènion dὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

22. Tîn dὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ·omboeidὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· t¦ dὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.

23. Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.



1. 'Aitήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

2. Ka^ peperasmšnhn eÙqe‹an kat¦ tÕ sunecὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.

3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γρά-

φεσθαι.

4.Kaˆ p£saj t¦j Ñrq¦j gwn.aj ‡saj ¢ll»laij εἶναι.

5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

ΚΟΙΝΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.

2.Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.

3.Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.

4.Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(6*).[Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.

(7*.) Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

(8*.)Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]

5.Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

(9*)Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

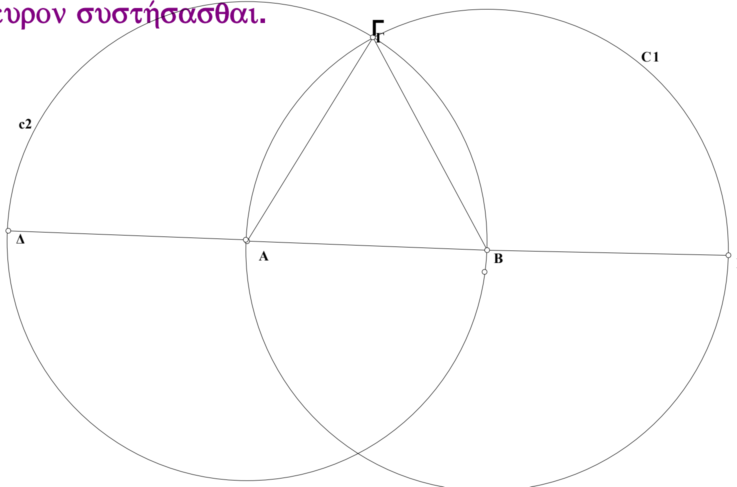


Κατωτέρω , παρατίθεται το αρχαίο κείμενο και οι αποδείξεις των προτάσεων 1-26 του βιβλίου I των Στοιχείων. Εντός των εγχρώμων παρενθέσεων γίνεται μνεία των όρων, αιτημάτων και κοινών εννοιών που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης.

=======================================

I.1

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον((ορ.20) συστήσασθαι.

Kšntr J mὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, (Αιτ.3) ka^ p£l in kšntr J mὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους(ΑΞΙΩΜΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ) οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ. (Αξ.1)

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ·(Ορ.15) ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, (Ορ.15) ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ™de.cqh dὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. t¦ dὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· (Κ.Ε.1)καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

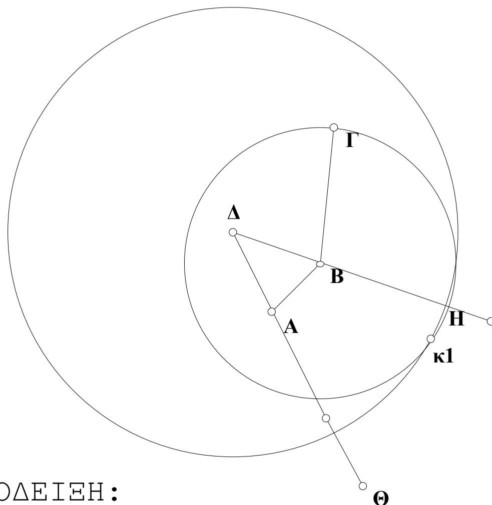
Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

[Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται]· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

=====================================

Ι2.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

"Estw tÕ mὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ¹ dὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ(Αξ.1), καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευ-

ρον τὸ ΔΑΒ,(I.1) καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ,(Αξ.2) καὶ kšntrJ mὲν τῷ Β διαστήματι dὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ,(Αξ.3) καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.(αξ.3)

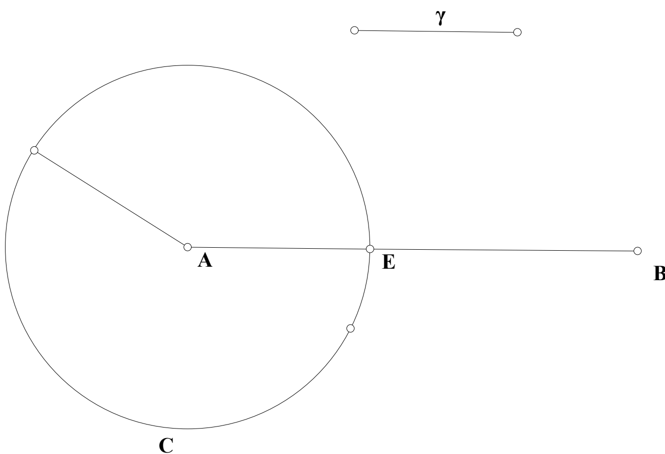
Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ·(Ορ.15) ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΚΛΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. (K.E.3) ™de.cqh dὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. t¦ dὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα·(K.E.1) καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I3.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι

ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ
ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ
τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

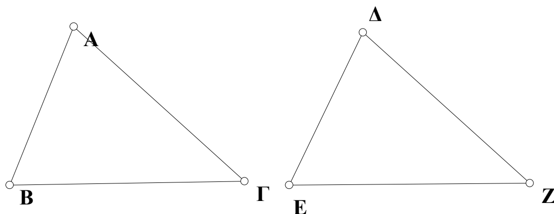
Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ
Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· (I.2)καὶ κέντρῳ
μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω
ὁ ΔΕΖ.(Αξ.3)

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου,
ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ·(Ορ.15) ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση.
ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· (Κ.Ε.1)ὥστε καὶ ἡ
ΑΕ τῇ Γ ἐστιν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς
μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ·
ὅ περ ἔδει ποιῆσαι.

==

I.4 Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ
τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ
πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα
˜katšran ˜katšrv t¾n mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ
t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ
ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω,
ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση
ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ

ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση
ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ
τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ
γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσον-
ται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνου-
σιν, 1 mὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, 1 dὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ

ὑπὸ ΔΖΕ.

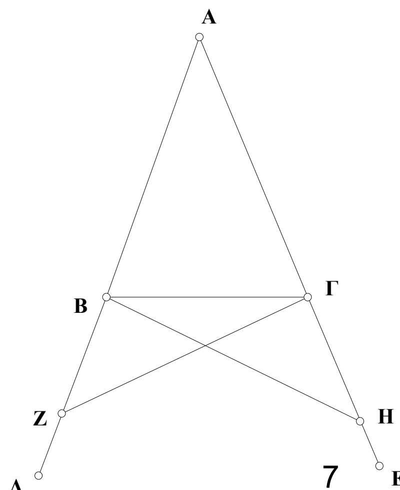
Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ tr.gwnon ka^ tiqemšnou toà mèn Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημeϊon tÁj dè ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ B shmeϊon ™p^ tÕ E di¦ tÕ ‡shn eἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ eÙqeϊa ™p^ t¾n DZ di¦ tÕ ‡shn eἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημeϊon ™farmÒsei di¦ tÕ ‡shn p£lin eἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. e„ g¦r toà mèn Β ἐπὶ τὸ Ε ™farmÒsantoj toà dè Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν· ὅπερ

οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσινὅπερ
ἐστὶν ἀδύνατον. ··(K.E.9*) ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται·(K.E.4) ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, ·(K.E.4) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ¹ mèn ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ dè ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

I5 Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.



Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:
"Estw tr.gwnon „soskel ὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴ ν ΑΒ
πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ·(Op.20) καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ'
εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ,
ΓΕ· (Αξ.2)λέγω, Óti ¹ mὲν ὑ πὸ ΑΒΓ γωνία
τῇ ὑ πὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ¹ dὲ ὑ πὸ ΓΒΔ
τῇ ὑ πὸ ΒΓΕ.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸ ν ση-
μεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μεί-
ζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση
ἡ ΑΗ, (Ι.3)καὶ ἐπεζεύ χθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ
εὐθεῖαι. (Αξ.1)

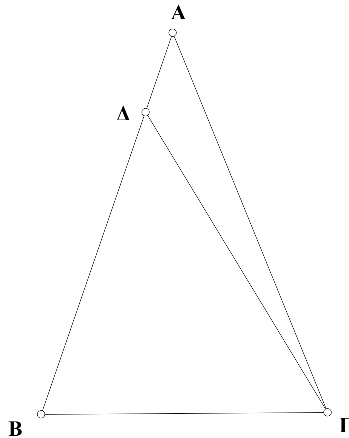
'Epeˆ oân ‡sh ™st˜n ¹ mὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ,
δύ ο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα
ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴ ν περιέχουσι τὴ ν ὑ πὸ ΖΑΗ·
βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ
τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γω-
νίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ,
ὑ φ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑ ποτείνουσιν, ¹ mὲν ὑ πὸ ΑΓΖ
τῇ ὑ πὸ ΑΒΗ, ¹ dὲ ὑ πὸ ΑΖΓ τῇ ὑ πὸ ΑΗΒ. (Ι.4)καὶ ἐπεὶ
ὅ λη ἡ ΑΖ ὅ λῃ τῇ ΑΗ ἐστιν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστιν
ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. ·(Κ.Ε.3) ἐδείχθη
dὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύ ο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς
ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ
ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑ πὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐ τῶν κοινὴ ἡ
ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον
ἔσται, ·(Ι.4) καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσον-
ται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑ φ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑ ποτείνουσιν·
‡sh ¥ra ™st˜n ¹ mὲν ὑ πὸ ΖΒΓ τῇ ὑ πὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑ πὸ
ΒΓΖ τῇ ὑ πὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅ λη ἡ ὑ πὸ ΑΒΗ γωνία
ὅ λῃ τῇ ὑ πὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑ πὸ ΓΒΗ τῇ
ὑ πὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑ πὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑ πὸ ΑΓΒ
ἐστιν ἴση··(Κ.Ε.3) καί εἰσι πρὸ ς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.
™de.cqh dὲ καὶ ἡ ὑ πὸ ΖΒΓ τῇ ὑ πὸ ΗΓΒ ἴση· καί εἰσιν
ὑ πὸ τὴ ν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸ ς τῇ βάσει γωνίαι
ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων
εὐθειῶν αἱ ὑ πὸ τὴ ν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται·
ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

**Ι.6 Ἐὰν τριγώνου αἱ δύ ο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ
ὑ πὸ τὰς ἴσας γωνίαις ὑ ποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις
ἔσονται.**

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004



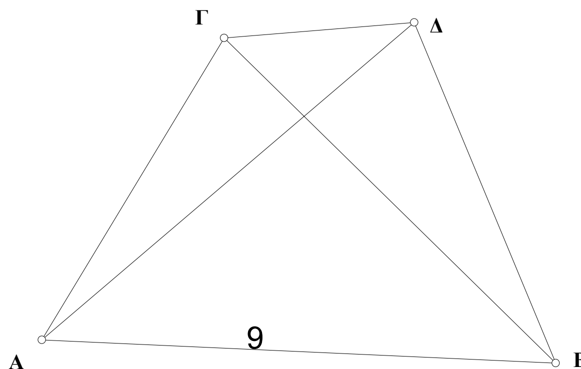
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω, ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστιν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ·(κρυφό αξ.1) ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, ·(I.3) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστιν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν, (I.4)καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον··(κρυφό αξ.2) οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα. ·(κρυφό αξ.3)
Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

I.7 Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.



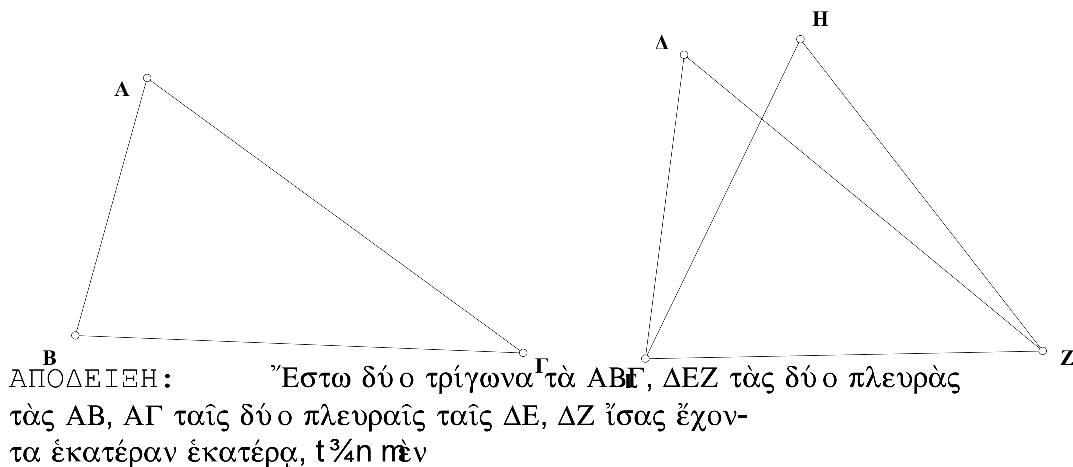
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, éste ‡shn eἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, t¾n dὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· (I.5)μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ··(κρυφό αξ.4) πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. ··(κρυφό αξ.5) πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ.(ι.5) ™de.cqh dὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅ περ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==================================

Ι8. Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς [ταῖς] δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, œχῃ dὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν

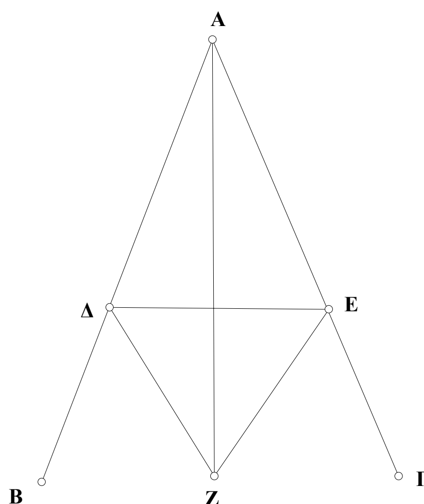
AB tÍ DE t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ·
™čštw dὲ καὶ βάσιν τὴ ν ΒΓ βάσει
τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω, ὅ τι καὶ γωνία
ἡ ὑ πὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑ πὸ ΕΔΖ
ἐστιν ἴση.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον kaˆ tiqemšnou toà mὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον tÁj dὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴ ν ΕΖ ἐφαρμό σει καὶ τὸ Γ shme‹on ™pˆ tÕ Z di¦ tÕ ‡shn eἶναι τὴ ν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴ ν ΕΖ ἐφαρμό σουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. e„ g¦ r b£sij mὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴ ν ΕΖ ἐφαρμό σει, af dὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐ κ ἐφαρμό σουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡ ς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐ τῆς εὐ θείας δύ ο ταῖς αὐ ταῖς εὐ θείαις ἄλλαι δύ ο εὐ θεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸ ς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐ τὰ μέρη τὰ αὐ τὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ·**(I.7)**οὐ κ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴ ν ΕΖ βάσιν οὐ κ ἐφαρμό σουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμό σουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴ ν ὑ πὸ ΕΔΖ ἐφαρμό σει καὶ ἴση αὐ τῇ ἔσται. ·(K.E.4)

Ἐὰν ἄρα δύ ο τρίγωνα τὰς δύ ο πλευρὰς [ταῖς] δύ ο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴ ν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴ ν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴ ν ὑ πὸ τῶν ἴσων εὐ θειῶν περιεχομένην· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

===

I9. Τὴ ν δοθεῖσαν γωνίαν εὐ θύ γραμμον δίχα τεμεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐ θύ γραμμος ἡ ὑ πὸ ΒΑΓ. δεῖ

δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

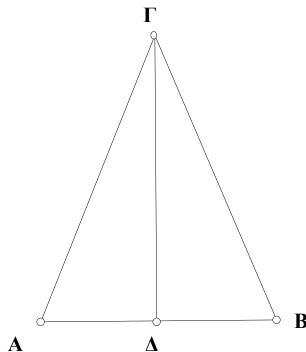
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ,(I.3) καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, ·(Αιτ.1) καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, (I.1)καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, koin¾ dὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν. (I.8)

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I10. Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ(I.1), καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ(**I.9**)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, koin¾ dὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.**(I.4)**

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I11.Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ”Estw ¹ mὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

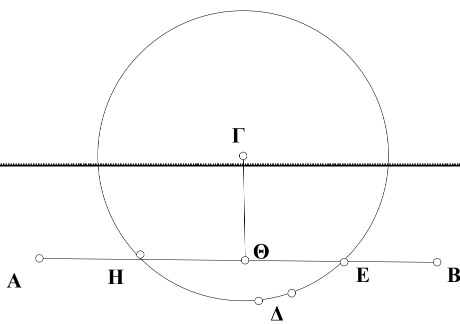
Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, **(I.3)** καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, **(I.1)** καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ·(Αιτ.1) · λέγω, ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, koin¾ dὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν·**(I.8)** καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ótan dὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν·**(Ορ.10)** ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

===================================

Ι.12 Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ”Estw ¹ mὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ AB τὸ δὲ δοqὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος

σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς AB εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, kaˆ kšntrJ mὲn tù Gdiast»mati dὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, **(Αιτ.3)** καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, **(I.10)** καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· **(Αιτ.1)** λέγω, ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

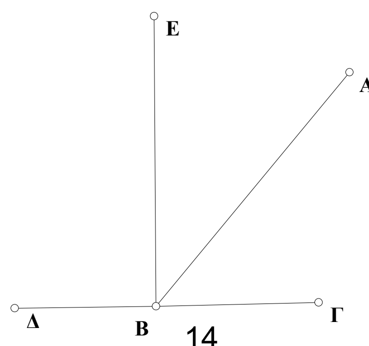
Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, koin¾ dὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστιν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστιν ἴση. **(I.8)** καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ótan dὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν AB ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

==

I13

Εὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.



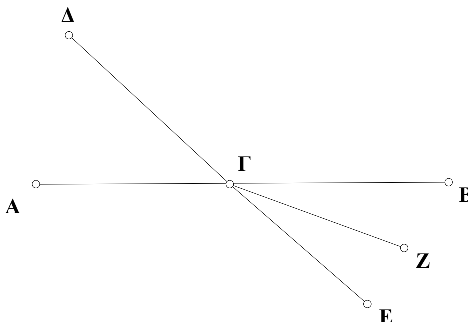
ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ· λέγω, ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. **(ορ.10)**

Ε„ mὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. e„ dὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ [εὐθείᾳ] πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ·**(Ι.11)** αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. **(κ.Ε.2)**πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι **(κ.Ε.2** εἰσίν. ™de.cqhsan dὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· t¦ dὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· **(κ.Ε.1)** καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

Ι14 Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Πρός γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ ση-

μείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ. **(Αιτ.2)**

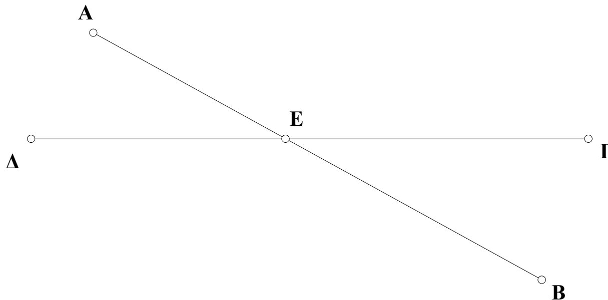
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· **(I.13)**e„s^ dè καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι **(Αιτ.2 και Κ.Ε4)** εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· **(Κ.Ε.3)**
ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, Óti oÙdè ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται

γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται
ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

I.15. **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.**



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω, ὅτι ἴση ἐst^n ¹ mὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ¹ dὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. **(I.13)**πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γω-

νίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. **(Ι.13)** ™de.cqhsan dὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. **(Αιτ.4 και Κ.Ε1)** κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· **(Κ.Ε.3)**
ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

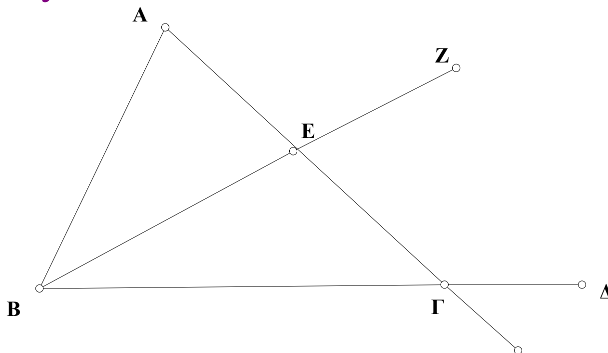
==

[Πόρισμα

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσιν.]

==

Ι.16.Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω, ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, **(ι.10)** καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, **(Ι.3)**
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, **(Αιτ.1)** καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η. **(Αιτ.2)**

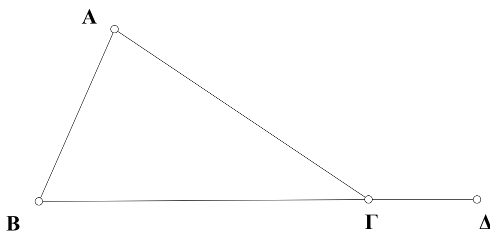
Ἐpeˆ oân ‡sh ™st ˆn ¹ mὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ¹ dὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα

ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ·**(Ι.15)** βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν·**(Ι.4)** ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. ·(κρυφό αξ.6) ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

Ι.17. Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

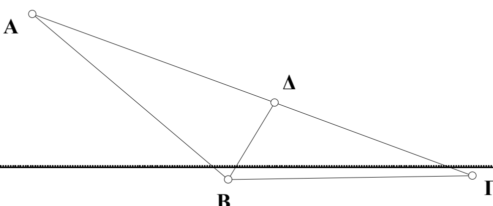
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. **(Αιτ.2)**

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. **(Ι.16)** κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν·**(Ι.13)** αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.**(Κ.Ε.6*)**. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

Ι.18. Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴ ν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω, ὅ τι καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΑΒΓ μεί-
ζων ἐστὶ τῆς ὑ πὸ ΒΓΑ.

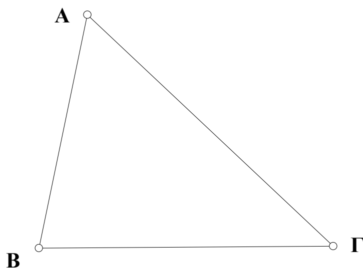
Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύ χθω ἡ ΒΔ. ·(Αξ.1)

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτό ς ἐστι γωνία ἡ ὑ πὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸ ς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑ πὸ ΔΓΒ· **(I.16)** ἴση dὲ ἡ ὑ πὸ ΑΔΒ τῇ ὑ πὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑ πὸ ΑΒΔ τῆς ὑ πὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑ πὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑ πὸ ΑΓΒ.

Παντὸ ς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴ ν μείζονα γωνίαν ὑ ποτείνει· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

I.19.Παντὸ ς τριγώνου ὑ πὸ τὴ ν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑ ποτείνει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴ ν ὑ πὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑ πὸ ΒΓΑ· λέγω, ὅ τι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ

μείζων ἐστίν.

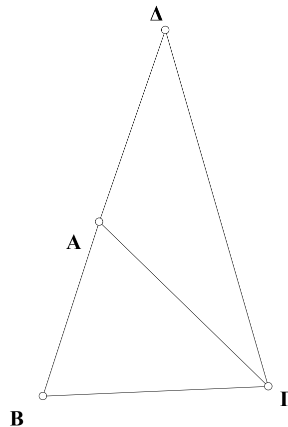
Εἰ γὰρ μή, ἤ τοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων··(κρυφό αξ.7) ‡sh mὲν οὖν οὐ κ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦ ν καὶ γωνία ἡ ὑ πὸ ΑΒΓ τῇ ὑ πὸ ΑΓΒ· **(I.5)** οὐ κ ἔστι δέ· οὐ κ ἄρα ἴση

ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. oÙdὲ μὴ ν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· **(I.18)** οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δέ, Óti oÙdὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ·(κρυφό αξ.8)

Παντὸ ς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴ ν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

I.20 **Παντὸ ς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό μεναι.**



῎ ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω, ὅ τι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό μεναι, af mὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, af dὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, af dὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

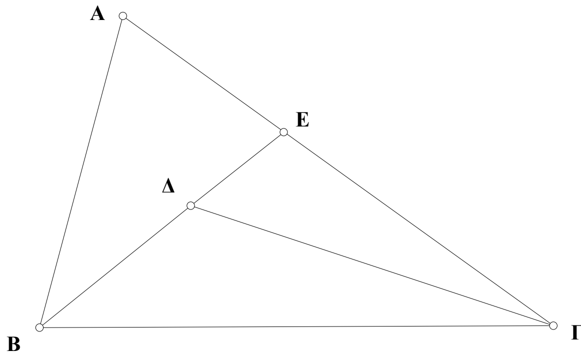
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· **(I.5)** μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· **(K.E.5)** καὶ ἐπεὶ τρίγωνό ν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴ ν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ØpÕ dὲ τὴ ν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, **(I.19)** ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστι μείζων. ‡sh dὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξομεν, Óti kaˆ af mὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, af dὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸ ς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανό μεναι· ὅ περ ἔδει δεῖξαι.

==

I.21 **Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸ ς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοι-**

pîn toà trigènou dÚo pl eurîn ™l£ttonej mèν ἔσονται,
me.zona dè γωνίαν περιέξουσιν.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ· λέγω, ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, me.zona dè γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, **(I.20)** τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, **(I.16)** τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

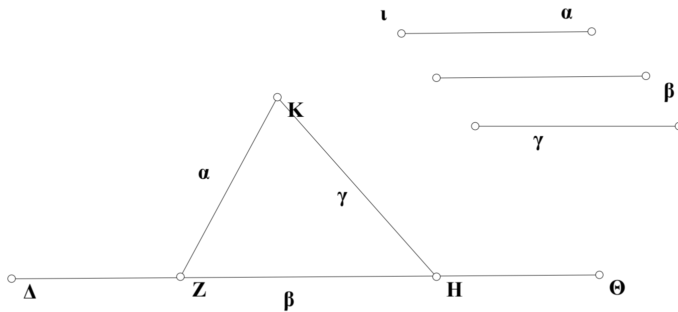
Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, me.zona dè γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

I.22 Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

[εὐθείαις], τρίγωνον συστήσασθαι· dex dὲ τὰς δύο τῆς l oipÁj me.zonaj εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας [διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζο-naj εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας]. (I.20)



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανό-μεναι, af mὲν Α, Β τῆς Γ, af dὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

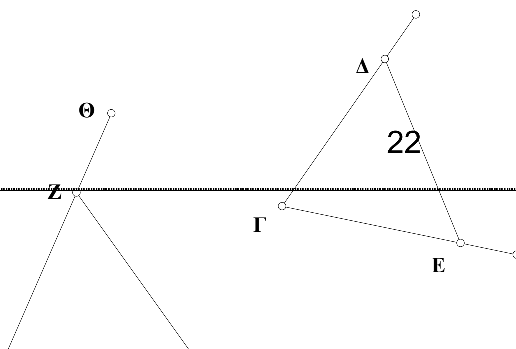
'Ekke.sqw tij eÙqe.a ¹ DE peperasmšnh mὲν κατὰ τὸ D ¥peiroj dὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ mὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, tÍ dὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, tÍ dὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· (I.3) καὶ κέντρῳ mὲν τῷ Ζ, diast»mati dὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· p£lin kšntrJ mὲν τῷ Η, diast»mati dὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ· λέγω, ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον·(Ορ.16) ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύ-κλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστιν ἴση. ·(Κ.Ε.1) καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστιν ἴση. ·(Κ.Ε.1) πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον·(Ορ.16) ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστιν ἴση. ™st˜ dὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγω-νον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

===

I .23 Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ”Estw ¹ mèn δοθεῖσα εὐ θεῖα ἡ AB, tÕ dè πρὸ ς αὐ τῇ σημεῖον τὸ A, ¹ dè δοθεῖσα γωνία εὐ θύ γραμμος ἡ ὑ πὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸ ς τῇ δοθείσῃ εὐ θείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸ ς αὐ τῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐ θυγράμμῳ τῇ ὑ πὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐ θύ γραμμον συστήσασθαι.

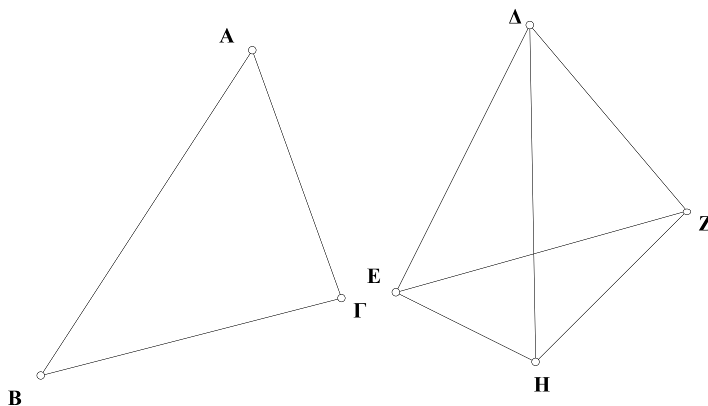
Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχό ντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύ - χθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐ θειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συν- εστάτω τὸ AZH, éste Þshn eἶναι τὴ ν μὲν ΓΔ τῇ AZ, t¾n dè ΓΕ τῇ AH, καὶ ἔτι τὴ ν ΔΕ τῇ ZH.**(I.22)**

Ἐπεὶ οὖν δύ ο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύ ο ταῖς ZA, AH ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ZH ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑ πὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑ πὸ ZAH ἐστιν ἴση. **(I.8)**

Πρὸ ς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐ θείᾳ τῇ AB καὶ τῷ πρὸ ς αὐ τῇ σημείῳ τῷ A τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐ θυγράμμῳ τῇ ὑ πὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐ θύ γραμμος συνέσταται ἡ ὑ πὸ ZAH· ὅ περ ἔδει ποιῆσαι.

==

I.24 Ἐὰν δύ ο τρίγωνα τὰς δύ ο πλευρὰς [ταῖς] δύ ο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n dè γωνίαν τῆ ς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴ ν ὑ πὸ τῶν ἴσων εὐ θειῶν περιεχομένην, καὶ τὴ ν βάσιν τῆ ς βάσεως μείζονα ἕξει.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ¹ dὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν.

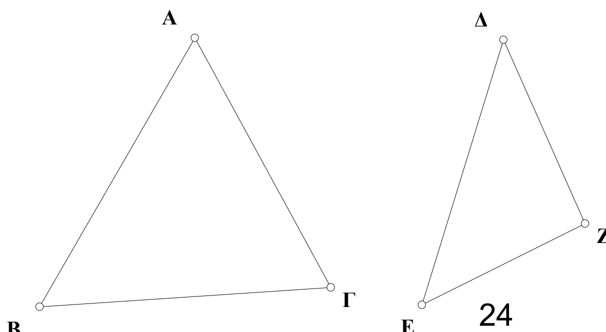
Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ,**(I.23)** καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

'Epeˆ oân ‡sh ™st‡n ¹ mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ¹ dὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. **(I.4)**πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ·**(I.5)** μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ØpÕ dὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ.**(I.19)** ‡sh dὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n dὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

==

I.25 Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n dὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· b£sij dὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω, ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν·

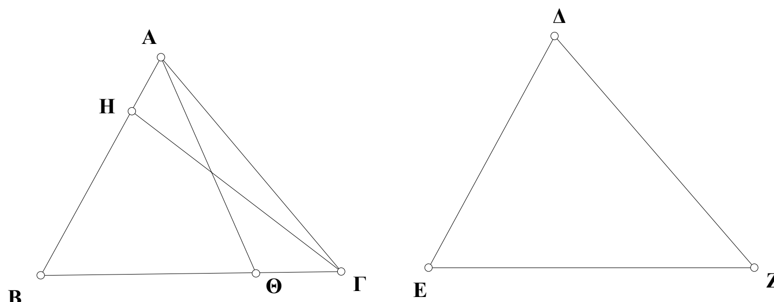
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ‡sh mὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ(**I.4**)· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οÙdὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ·**(I.24)** οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν

ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ™de.cqh dὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκάτερᾳ, t¾n dὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

===

I26 **Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.**



ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ὑπὸ

ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, t¾n dὲ ὑπὸ
ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ™čštw dὲ καὶ
μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην,
πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις
γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω,
ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς
λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, t¾n mὲν ΑΒ
tÍ DE t¾n dὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ
γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων
ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ,
καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

'Epeˆ oân ‡sh ™stˆn ¹ mὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ¹ dὲ ΒΓ τῇ ΕΖ,
δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα
ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση
ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ
ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοι-
παὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· **(I.4)**ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ
ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση·
καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων
τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ
ΔΕ. ἴση ἄρα. œsti dὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ,
ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ
γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστιν ἴση· βάσις
ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ
ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν. **(I.4)**

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευ-
ραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· λέγω πάλιν, ὅτι
καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται,
¹ mὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ¹ dὲ ΒΓ τῇ ΕΖ καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ
ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων
ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ
ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. kaˆ ™peˆ ‡sh ™stˆn ¹ mὲν
BQ tÍ EZ ¹ dὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς
ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας
περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ
τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ
λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ
ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· **(I.4)**ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ
γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστιν
ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ
ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ
ἀδύνατον. **(I.16)**οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα.
™stˆ dὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς

ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση. **(I.4)**

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

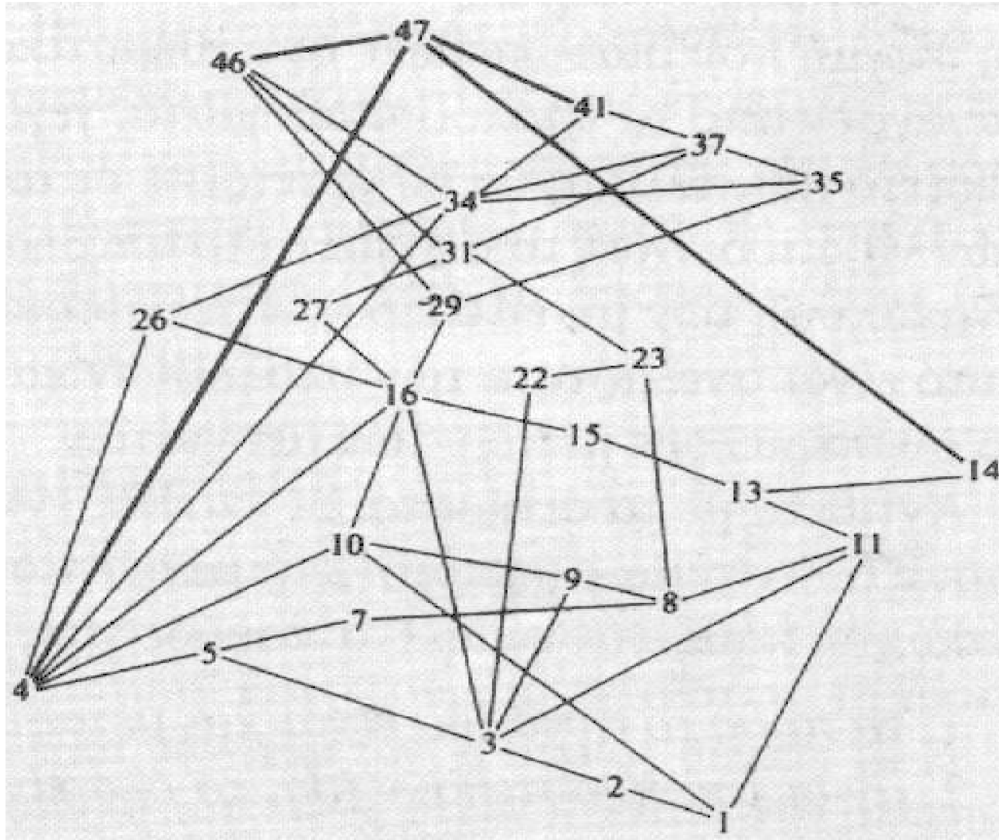
Πίνακας λογικής διάθρωσης των προτάσεων Ι.1-Ι.26 των «Στοιχείων» του Ευκλείδη

(α/α) Ι.	Προτάσεις	Αξιώματα	Όροι	Κοινές έννοιες	Κρυφά αξιώματα*
1	-	3,1	15,20 15	1	Αξίωμα συνεχείας
2	1	1,2,3,3	15	3,1	
3	2	3	15	1	
4	(2)			4,4, 9*	
5	3,4	2,1	20	3,3	
6	3,4				1,2,3
7	5,5				4,5
8	7			4	
9	1,3,8	1			
10	1,4,9				
11	1,3,8	1	10		
12	8,10	3,1			

13	11	2,2		1,3	
14	13	2,4		1,3	
15	13,13	1,2		5	
16	3,4,10,15	1,2,			6
17	13,16	2		6*	
18	16	1			
19	5,18				7, 8
20	5,19			5	
21	20,20,16,				
22	3		16,16	1,1	
23	8,22	1			
24	4,5,19,23	1			
25	24				
26	4,4,3	1,1			

Η παραπάνω λογική διάθρωση δείχνει τις προαπαιτούμενες και το είδος κάθε πρότασης που χρησιμοποιούνται σε κάθε απόδειξη.
Καταφαίνεται έτσι ότι η σειρά δόμησης είναι αυστηρή σε μια οιονεί διαδικασία οικοδόμησης .
Φυσικά σε όλες τις προτάσεις, οι προαπαιτούμενες έχουν παρατεθεί στο βιβλίο σε πρότερη θέση. Μέχρι πρόσφατα, αλλά και σήμερα , κάποιες από τις προσπάθειες επέμβασης στην Ευκλείδεια αντίληψη είναι η αλλαγή στην σειρά κάποιων προτάσεων, χωρίς να μεταβληθεί η δομή τις εξάρτησης των επόμενων από τις προηγούμενες προτάσεις.

Μια εδεικτική λογική διάθρωση ενός σπουδαίου θεωρήματος , του Πυθαγορείου .



Στο πάρα πάνω σχήμα οι αριθμοί υποδηλώνουν την αρίθμηση των προτάσεων στο βιβλίο Ι. των Στοιχείων .(Από το «The Greek Concept of Proof» σειρά MA290 : Topics in the history of Mathematics, του Αγγλικού Ανοικτού Πανεπιστημίου)

ΤΑ ΚΡΥΦΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

Τα παρακάτω «κρυφά αξιώματα» , είναι μια ομάδα , που ο Ευκλείδης θα μπορούσε να συμπεριλάβει στις **κοινές έννοιες** , αλλά δεν ετέθησαν .Υπάρχουν στις προτάσεις Ι.6 , Ι.7 , Ι.16 , Ι.17 , Ι.19. Παρατίθενται με λεκτική διατύπωση , αλλά και με σύγχρονη μαθηματική γλώσσα.

1. Αν δύο μεγέθη δεν είναι ίσα, τότε θα είναι άνισα.(Αν [όχι $\chi=\psi$], τότε [$\chi<\psi$ ή $\chi>\psi$])……………(Ι.6)

2.Δύο μεγέθη δεν μπορούν ταυτοχρόνως να είναι και ίσα και άνισα (Ι.6)

3. Δύο αρνήσεις κάνουν μια κατάφαση. (Αν το χ δεν είναι διάφορο του ψ , τότε θα είναι ίσο μ΄ αυτό)[Αν όχι (χ διάφορο του ψ) , τότε χ=ψ]……………………………………(Ι.6)

4. Το μικρότερο από κάτι , θα είναι μικρότερο κι απ΄ το ίσο προς αυτό.(Αν χ<ψ και ψ=ω , τότε χ<ω)………………………………(Ι.7)
5. Μεταβατική ιδιότητα της ανισότητας (Αν χ<ψ και ψ<ω , τότε χ<ω (Ι.7)
6.Αν δύο μεγέθη είναι ίσα και ένα εξ αυτών άνισο προς τρίτο, τότε και το άλλο ομοίως άνισο προς το τρίτο (Αν χ=ψ και ψ<ω , τότε χ<ω) (Ι.16)
7.Αν ένα μέγεθος δεν είναι υπέρτερο άλλου, τότε το άλλο θα είναι υπέρτερο ή ίσο (Αν όχι[χ>ψ] τότε [χ<ψ ή χ=ψ](Ι.19)
8. Αν ένα μέγεθος δεν είναι έλασσον άλλου κι όχι ίσον, τότε θα είναι μείζον (Η αντιθετοαντίστροφη πρόταση της προηγουμένης) (Ι.19)

Τουλάχιστον τις παρατηρήσεις επί της Ι.19 έχει κάνει ο λογικιστής φιλόσοφος Frege .

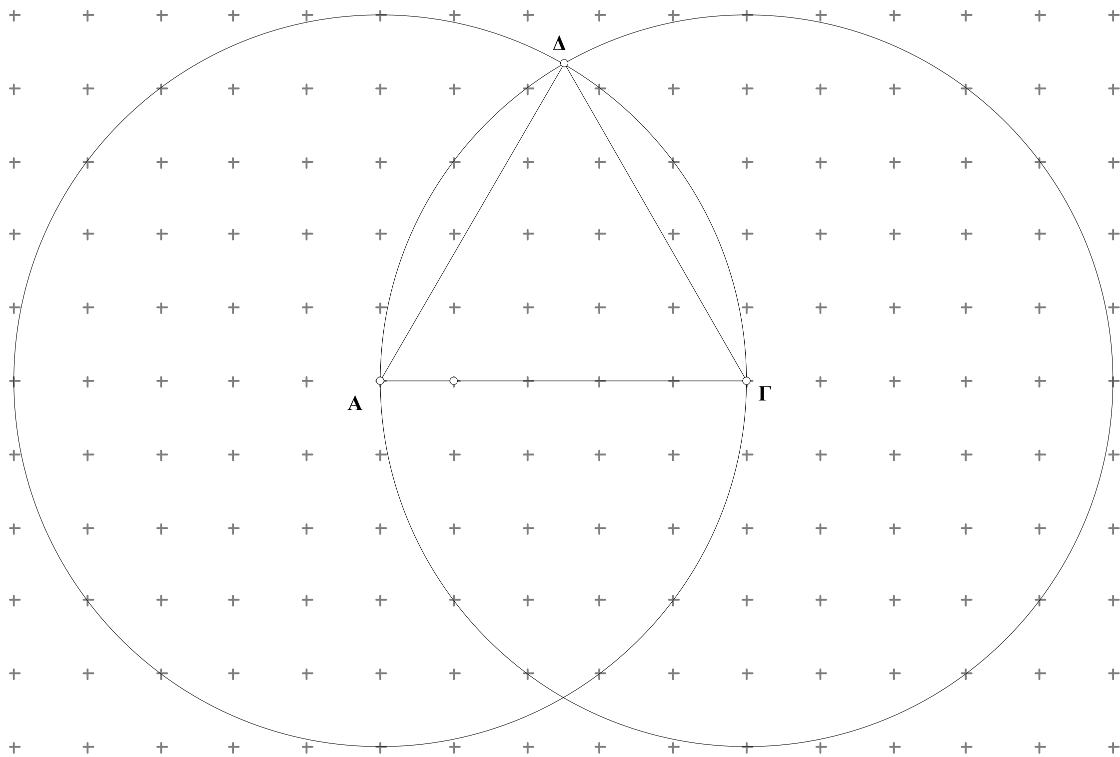
ΑΛΛΑ ΚΡΥΦΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ

*(i)Το αξίωμα της **συνέχειας** και του **μεταξύ***

Στην απόδειξη της Ι.1 (Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου από την πλευρά του)υποννοείται ,ότι οι δύο κύκλοι που χρειάζονται για την κατασκευή **τέμνονται,** κάτι που ο Ευκλείδης ίσως να θεώρησε προφανές, αλλά ίσως και όχι.Έθεσε την πρόταση αυτή πρώτη στα Στοιχεία του , **ίσως για να δείξει την μεγάλη σημασία της,** αφού και με μόνη την χρήση αυτής, μεταγενέστεροι μαθηματικοί έδειξαν ότι:

- Αν Α και Β σημεία που ευρίσκονται στο εσωτερικό και εξωτερικό κύκλου , τότε η ΑΒ τέμνει τον κύκλο.
- Κάθε ευθεία που διέρχεται από εσωτερικό σημείο κύκλου, τον τέμνει σε δύο σημεία.
- Τα α, β, γ αποτελούν μήκη πλευρών τριγώνου , αν και μόνο αν κάθε ένα είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων.
- Αν δύο κύκλοι (Α, α) και (Β,β) έχουν ΑΒ=γ , και κάθε ένα από τα α, β, γ είναι μικρότερο από το άθροισμα των δύο άλλων, τότε οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία.

Βεβαίως υπέθεσε ο Ευκλείδης ότι ο κύκλος είναι **συνεχής γραμμή** που δεν μπορεί να θεωρηθεί προφανές.
Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό:
Αν θεωρήσω τον χώρο : ; Q^{22} και επιχειρήσω να κατασκευάσω ισόπλευρο τρίγωνο με την Ευκλείδεια μέθοδο, ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $α \in Q$, τότε με απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής $(χ,ψ) \notin Q^2$ αφού ψ∈Ñ\:Q. .



Στα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα θεμελίωσης της Γεωμετρίας η τομή των δύο κύκλων εξασφαλίζεται από τα αξιώματα της **συνέχειας** και του **μεταξύ.**
Τον 19^{ο} αιώνα ο Pash εισήγαγε (1882) την έννοια του **μεταξύ για τρία σημεία**.
Το σύστημα αυτό βελτιώθηκε (βελτίωση σημαίνει συρίκνωση του αριθμού μη οριζόμενων στοιχείων ή αξιωμάτων) από τον Peano (1889) υπήρξε και το σύστημα του Pieri (1889)
Τον 20ο αιώνα το σύστημα Veblen (1904) που βελτίωνε το του Pash του Forder (1924) , Robinson(1940) Levi (1960)κ.λπ.
Την μεγάλη θέση όμως ανάμεσα σε όλα τα συστήματα , καταλαμβάνεουν τα συστήματα των Hilbert-Ευκλείδη (1899) και Birkhoff (1932)

Αναφέρουμε το αξίωμα του Pash (Αξίωμα του «μεταξύ»)

Έστω τρία σημεία Α,Β,Γ, μη κείμενα επί της ιδίας γραμμής, και έστω (ε) μία γραμμή επί του επιπέδου (ΑΒΓ) η οποία δεν διέρχεται από κανένα από τα Α, Β, Γ.

Τότε: Αν η (ε) διέρχεται από σημείο του τμήματος ΑΒ, θα διέρχεται και από σημείο του τμήματος ΑΓ ή ΒΓ.

Αξίωμα του Dedekint (Αξίωμα της συνέχειας)

Για κάθε διαμέριση των σημείων μιας γραμμής σε δύο μη κενά σύνολα , έτσι ώστε κανένα σημείο του ενός συνόλου να κείται μεταξύ των σημείων του άλλου,, υπάρχει σημείο του ενός συνόλου , το οποίο κείται μεταξύ κάθε στοιχείου του ιδίου συνόλου και κάθε στοιχείου του άλλου συνόλου.

Όμως ο μέγιστος ιστορικός της μαθηματικής επιστήμης Sir Thomas Heath μας λέει ότι το αίτημα 3 , δηλαδή το πώς «με κάθε κέντρο και με κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος, αυτό μας εξασφαλίζει και το άπειρον του Ευκλειδείου χώρου, αλλά και την συνέχεια . Προφανώς η λέξη «κάθε» εξασφαλίζει το «οσοδήποτε μεγάλη ακτίνα και οσοδήποτε μικρή» , εκφράσεις που παραπέμπουν κατ' ουσίαν σε σύγχρονους «εψιλοντικούς» ορισμούς για το άπειρο και το απειροστό.

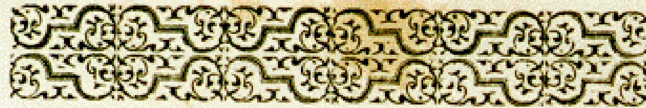
(ii)Το αναλλοίωτο των σχημάτων κατά την μετακίνηση- επίθεση (υπέρθεση) των σχημάτων

Στις αποδείξεις των Ι.4 και Ι.8 , ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί την μέθοδο **της υπέρθεσης** (επίθεσης) δύο σχημάτων. Φαίνεται να είναι μια πολύ αρχαιότερη του Ευκλείδη μέθοδος αποδείξεως, την χρήση της οποίας αποφεύγει να κάνει ο Ευκλείδης και την χρησιμοποιεί μόνο στις προειρημένες δύο προτάσεις, παρ΄ ότι εύκολα λ.χ. τις Ι.2 και Ι.3 πράγμα που δεν κάνει. Η μέθοδος αυτή έχει υποστεί την κριτική ότι είναι **μηχανική** υπονοώντας έναν οιονεί πειραματικό χαρακτήρα , πράγμα που κατά την γνώμη πολλών είναι υπερβολικό έως άτοπο , αφού **είναι σαφής ο στοχαστικός χαρακτήρας** της υπέρθεσης των σχημάτων.
Όπωσδήποτε όμως, το ότι κατά την μετακίνησή του το σχήμα μένει αμετάβλητο, τουλάχιστον με την οπτική που επιβάλουν τα σύγχρονα μαθηματικά **δεν είναι προφανές,** αν και κατά την γνώμη άλλων σχολιαστών (Σερ Thomas Haeth) το 4^{o} Αίτημα της ισότητας όλων των ορθών γωνιών , ουσιαστικά ισοδυναμεί με την **αρχή του αναλοίωτου των σχημάτων** ή της **ομοιογένειας του χώρου**.
Ο συλλογισμός που παραθέτει ο Heath είναι ο εξής:
Το αίτημα 4, καταχωρίζεται συχνά ως θεώρημα. Αλλά σε κάθε περίπτωση θα έπρεπε κα καταχωριστεί πριν από το αίτημα 5, για τον λόγω του ότι αυτό δεν θα αποτελούσε κριτήριο για το αν οι ορθές αποτελούν καθορισμένα μεγέθη.. Αν λοιπόν το αίτημα 4 επρόκειτο να αποδειχθεί ως θεώρημα, θα μπορούσε να αποδειχθεί με ένα ζεύγος προσκειμένων ορθών γωνιών σε ένα άλλο ζεύγος γωνιών Αυτή η μέθοδος δεν θα μπορούσε να ισχύσει , παρά μόνο με βάση την αρχή του αναλοίωτου των σχημάτων., η οποία θα έπρεπε να καθιερωθεί ως αίτημα προηγούμενο. Ο ευκλείδης λοιπόν, προετίμησε να επιβεβαιώσει με αίτημα ότι όλες οι ορθές είναι ίσες, πράγμα που ισοδυναμεί με την αρχή του αναλοίωτου των σχημάτων ή της ομοιογένειας του χώρου.
Στην σύγχρονη θεμελίωση του Hilbert η πρόταση Ι.4 αποτελεί αξίωμα και μάλιστα όπως ο Hilbert απέξειξε, ανεξάρτητο από τα άλλα .

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

(iii) Δύο παρατηρήσεις στα αξιώματα 1 και 2

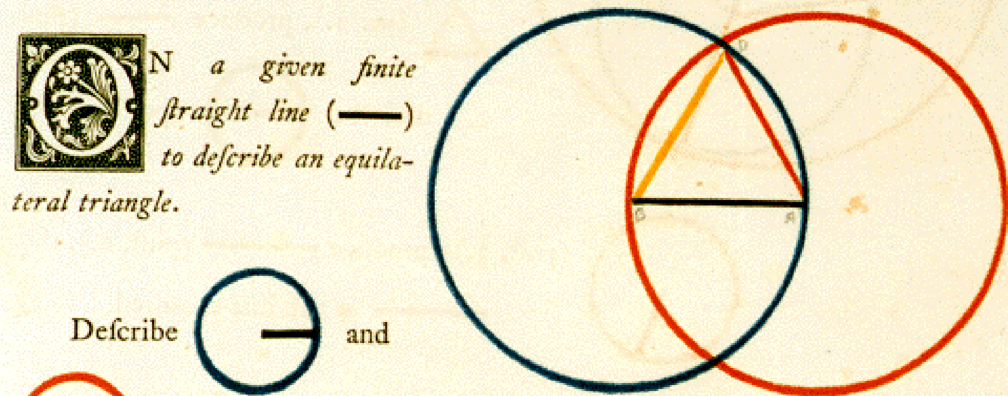
Το Αίτημα 1 εξασφαλίζει την **ύπαρξη** ευθείας , αλλά **όχι την μοναδικότητά της**, κάτι που ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί στα στοιχεία του.
Επίσης, το Αίτημα 2 ,μας εξασφαλίζει ότι μπορούμε να εκτείνουμε ευθύγραμμο τμήμα **συνεχώς και ευθυγράμμως**, κάτι που δεν είναι απολύτως σαφές ότι η ευθεία έχει άπειρο μήκος. Αυτά , σύμφωνα με κάποιες (μάλλον υπερβολικές) κριτικές. (Carle B.Boyer-Uta C. Merzbach "Ιστορία Μαθηματικών"Εκδόσεις Πνευματικού ΑΘΗΝΑ –1977) Κατά την γνώμη μας όμως , η κριτική αυτή είναι και άτοπη , αφού η σύγχρονη έννοια του απείρου απαιτεί την **απεριόριστη μεγέθυνση** , κάτι που είναι κοινός τόπος μεταξύ των μαθηματικών . Δηλαδή , κάθε ευθύγραμμο τμήμα προεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως κατά **όσο (προφανώς) θέλουμε**, άρα έχει άπειρο μήκος.
Ο σχολιασμός του **Sir Thomas Haeath** επί των αιτημάτων 1 και 2 , είναι ότι το δεύτερο σε σχέση με το πρώτο εξασφαλίζει την μοναδικότητα της ευθείας που ορίζουν δύο σημεία , αφού το πρώτο εξασφαλίζει την μοναδικότητα του ευθυγράμμου τμήματος , ενώ με την δυνατότητα απεριόριστης προέκτασης που έχουμε με το δεύτερο, έχομε το συμπέρασμα και για την ευθεία. Επί πλέον ο **Heath** ισχυρίζεται , ότι τα δύο αυτά αιτήματα, εξασφαλίζουν το ότι δύο ευθείες δεν μπορούν να περικλείουν επιφάνεια και ότι (συνεπώς) το «κρυφό αξίωμα» που παραθέτει ο Ευκλείδης στην Ι.4 (Δύο ευθείες δεν περικλείουν επιφάνεια)δεν χρειάζεται.
Επίσης **ο Heath** διετύπωσε , ότι το αίτημα 2, συνεπάγεται το θεώρημα που έθεσε ως πόρισμα της Ι.11 **ο Simson** , ότι δηλαδή αν δύο ευθείες έχουν κοινό ευθ. τμήμα, τότε συμπίπτουν.



Euclid.

BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.



ON *a given finite ſtraight line* (——) *to deſcribe an equilateral triangle.*

Deſcribe [circle] and [circle] (poſtulate 3.); draw —— and —— (poſt. 1.).

then will [triangle] be equilateral.

For —— = —— (def. 15.);

and —— = —— (def. 15.),

∴ —— = —— (axiom. 1.);

and therefore [triangle] is the equilateral triangle required.

Q. E. D.

B

Γιάννης Π. Πλατάρος
25/4/2004

Μια περίεργη και πρωτοποριακή έκδοση των πρώτων 6 βιβλίων του Ευκλείδη έγινε το 1847 από τον Oliver Byrne. Δίνει έμφαση στο χρώμα και την σχηματικότητα των αποδείξεων , ώστε να είναι προσιτή με τους ελάχιστους δυνατούς γλωσσικούς φραγμούς. Εδώ οι προτάσεις Ι.1 , Ι.2 , Ι.3
http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/byrne.html

Βιβλιογραφία:

1) «Ευκλείδου Γεωμετρία» Ε.Σ. Σταμάτη –Εκδ. οίκος Νικ. Α. Σάκκουλα-Αθήναι 1952
2) «Η Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών» Sir Thomas Heath –Έκδοση ΚΕ.ΕΚ.ΕΚ. Αθήνα 2001
3) «Ευκλείδη Στοιχεία»Τόμος Ι - Εκδόσεις ΚΕ.ΕΠ.ΕΚ. –Αθήνα 2001
4) Euclid ,The thirteen Books of the Elements Vol1. –Sir Thomas Heath –Dover Rublications Inc. --New York
5) Ιστορία των Μαθηματικών –Courla B. Boyer Uta.C. Merzbach –Εκδ. Πνευματικού –Αθήνα 1977
6) Πρακτικά 14ου Μαθηματικού Συνεδρίου- Μυτιλήνη 1997 (Έυκλείδειες Γεωμετρίες –Γιάννης Αραχωβίτης)

Διαδίκτυο

1) http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html
2) http://www.perseus.tufts.edu/cgi-bin/ptext?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0086&layout=&query=toc&loc=9.1
3) http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/Euclid/byrne.html

Γιάννης Π. Πλατάρος

«Για τους ορισμούς των **Στοιχείων** για το σημείο, γραμμή , πέρας, ευθεία γραμμή , γωνία, όρο, σχήμα, κύκλο, αναδρομή στα σχόλια του Sir Thomas Heath και στο αρχαίο κείμενο του Πρόκλου, **εις Ευκλείδην** και ανάπτυξη του περιεχομένου τους»

Σχόλια του Heath για τον ορισμό του σημείου. (Ορισμός 1)

Ευκλείδης: « σημείον εστίν , ου μέρος ουθέν»

Αφού παραθέτει τον προηγούμενο ορισμό του σημείου κατά Ευκλείδη, μας πληροφορεί, ότι ένας παράλληλος ορισμός για το σημείο βρίσκεται στον Αριστοτέλη «Μετά τα Φυσικά» (1035b32)[1]

Αναφέρει ότι ο Bontz το μετέφρασε στον πληθυντικό αυτό το χωρίο , λέγοντας ότι το είδος διαιρείται σε μέρη. Και σύμφωνα με τα παραπάνω , θα μπορούσαμε να πούμε , ότι **ένα σημείο είναι αυτό που δεν είναι διαιρετό σε μέρη** .

Ο Μαρτιανός Κάπελλα μόνος , ή σχεδόν μόνος το μετέφρασε διαφορετικά: «Σημείο είναι αυτό, μέρος του οποίου είναι τίποτα» . Ο Max Simon υιοθέτησε την μετάφραση, αλλά σύμφωνα με τον Heath, δεν θεωρείται ότι αυτή η μετάφραση ανταποκρίνεται προς τα πράγματα, παραθέτοντας το επιχείρημα, ότι αν ο Ευκλείδης εσκέπτετο έναν τέτοιο ορισμό, (μέρος σημείου το «τίποτα») θα έπρεπε να είχε ορίσει εξ αρχής , ότι «σημείο είναι αυτό που τα μέρη του είναι τίποτα» , πράγμα που ο Ευκλείδης δεν έκανε.

Και συνεχίζει ο Heath:

1. –mšroj mὲν οὖν ἐ στˆ kaˆ toὰ e‡douj (eἶδος δὲ λέγω τὸ τί ἦν eἶναι) (εδώ ο Heath προφανώς αναφέρεται στην ορολογία του Αριστοτέλη που χρησιμοποιεί το «μέρος»)

Προευκλείδιοι Ορισμοί

Ο πρώτος ορισμός για το σημείο είναι Πυθαγόρειος (« μονάς προσλαβούσα θέσιν»[2]) , μια πληροφορία που την συναντάμε στον Πρόκλο (σ.95, 21) . Αυτός ο ορισμός χρησιμοποιείται συχνά και από τον Αριστοτέλη («Μετά τα φυσικά»1016b 24)[3] και λέει ό,τι είναι με κάθε τρόπο αδιαίρετο ως προς το μέγεθος , αλλά δεν έχει θέση είναι η μονάδα, ενώ, αυτό το οποίο με τον ίδιο τρόπο είναι αδιαίρετο και έχει θέση, είναι το σημείο. Ο Πλάτωνας φαίνεται να έχει αντίρρηση σε αυτόν τον ορισμό, Ο Αριστοτέλης στα «Μετά τα φυσικά» (992a 20) λέει ότι έχει αντίρρηση στην εισαγωγή αυτού του γένους [των σημείων] ως να είναι γεωμετρικό δόγμα και αποκάλεσε σημείο την αρχή της γραμμής , ενώ συχνά ομιλεί και για αδιαίρετες γραμμές. [4]

Θα μπορούσε να γίνει φανερό, ότι όταν ο Αριστοτέλης έχει αντίρρηση στον ορισμό του σημείου , ως πέρας γραμμής, το κάνει διότι το θεωρεί αντιεπιστημονικό. (Τοπικά VI 141b 21)[5]

Ο Χάϊμπεργκ φρονεί , ότι οφείλεται στον Πλάτωνα που η λέξη στιγμή (την οποία χρησιμοποιεί συχνά ο Αριστοτέλης, αντικαταστάθηκε από την λέξη σημείο. (ο ενικός αριθμός [στιγμή] χρησιμοποιείτο από Ευκλείδη

---

[2] Το ακριβές χωρίον λέεει το εξής: «Ἐπεὶ dὲ καὶ οἱ Πυθαγό ρειοι τὸ σημεῖον ἀφορί - ζονται μονάδα προσλαβοῦσαν θέσιν, σκεπτέον τί ποτε νοοῦντες λέγουσιν»

[3]Παραθέτουμε και τις άλλες δύο γραμμές του αρχαίου κειμένου: τὸ mὲν π£ntV ka ¥qeton λέγεται μονάς, tÕ dὲ π£ntV ka qšsin œcon stigm», tÕ dὲ μοναχῇ γραμμή, tÕ dὲ διχῇ ἐ πί πεδον, tÕ dὲ π£ntV ka tricÍ diairetÕn kat¦ tÕ posÕn

[4] Παραθέτουμε το χωρίον 20-24 : . ἔ τι αἱ στιγμαὶ ™k t... noj ™nup£rxousin; toÚtJ mὲν οὖν τὼ γένει καὶ διεμάχετο Πλάτων ὡ ς ὄ ντι γεωμετρικῷ δό γματι, ἀλλ' ἐ κάλει ἀρχὴ ν γραμμῆς—toàto dὲ πολλ£kij ™t... qei—τὰς ἀτό μους γραμμάς. ka... toi ¢n£gkh toÚtwn εἶναί τι πέρας· ὥστ' ἐ ξ οὗ λό γου γραμμὴ ἔ στι, καὶ στιγμὴ ἔ στιν.

[5] Παραθέτουμε το πλήρες απόσπασμα από τον Αριστοτέλη ο οποίος ομιλεί για **«προθύστερον»** (=λαμβάνεται λανθασμένα το φυσιολογικά ύστερον , ως πρώτον , κάτι ανάλογον με την «λήψη του ζητουμένου») σχήμα στους ορισμούς: «εἰσὶ dὲ τῶν τοιούτων ὁ ρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ τοῦ ἐ πιπέδου· πάντες γὰρ διὰ τῶν ὑ στέρων τὰ πρό τερα δηλοῦσιν· tÕ mὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐ πιπέδου, tÕ dὲ στερεοà fasi pšraj εἶναι.»

Αρχιμήδη και μεταγενέστερους.) Ο δεύτερος όρος (σημείο) πιθανόν να θεωρείται περισσότερο κατάλληλος από ό,τι ο όρος στιγμή, κάτι που φαίνεται να δίνει μεγαλύτερη οντολογική υπόσταση σε ένα σημείο.
Η αντίληψη του Αριστοτέλη ότι ένα σημείο είναι αδιαίρετο και έχει θέση, για έναν πρόσθετο λόγο είναι αληθινή, από παρατηρήσεις του τύπου ότι ένα σημείο δεν είναι σώμα[6] και δεν έχει βάρος[7] .
Ο Hence πιστεύει ότι τα σημεία δεν μπορούν να κατασκευάσουν τίποτα συνεχόμενο, όπως για παράδειγμα μια γραμμή.
Επ΄ αυτού έχουμε το σχετικό χωρίο που λέει ότι ένα σημείο , δεν μπορεί να συνεχίζεται με σημείο. (« ου γαρ εστίν εχόμενον σημείον σημείου ή στιγμή στιγμής»[8])
Στα «Φυσικά» του Αριστοτέλη, έχουμε την απόφανση, ότι μία γραμμή δεν αποτελείται από στιγμές. («ου σύγκειται εκ στιγμών»[9])
Επίσης ο Αριστοτέλης μας λέει ότι ένα σημείο είναι όπως το «τώρα» στην στιγμή. Το τώρα είναι αδιαίρετο και δεν είναι μέρος της στιγμής.[10] Είναι μόνο η αρχή ή το τέλος ή μια διαίρεση του χρόνου και ομοίως, ένα σημείο , μπορεί να είναι ένα όριο, μια αρχή, ή διαίρεση μιας γραμμής , αλλά δεν είναι μέρος της ή γενικά μέρος οιουδήποτε μεγέθους.[11]
Αλλού ο Αριστοτέλης λέει ότι ένα σημείο μπορεί να παράξει μια γραμμή μόνο έπειτα από κίνηση.[12]

---

[6] Deca elo II.13,296a17
[7] ibid III.1209aII
[8] Gen et. Corr 1.2 317 a10
[9] (Physics IV 8,215b19
[10] Στην Ελληνική γλώσσα αυτό είναι προφανές.
[11] Deca ello III.1,300a14, Physics II222a1-21, VI.1 231b .g.s.qq
[12] de anima I.4 409a4 Το πλήρες πρωτότυπο χωρίον έχει ως εξής: « ἔ τι δ' ἐ πεί φασι κινηθεῖσαν γραμμὴ ν ἐ πί πεδον ποιεῖν, stigm¾n dὲ γραμμήν, καὶ αἱ τῶν μονάδων κινήσεις γραμμαὶ ἔ σονται·»

Άλλοι Αρχαίοι ορισμοί

Σύμφωνα με έναν Nayrizi (έκδοση Curtze σελίδα 3) ένας άγνωστος «Ηρούνδης» (όχι όμως και τόσο γνωστός) όρισε το σημείο, ως αδιαίρετη αρχή όλων των μεγεθών . και ο Ποσειδώνιος ως το πέρας (όριο) που δεν έχει διάσταση ή ως το τέλος μια γραμμής.

Κριτικές από σχολιαστές

Πρακτικά ο ορισμός του σημείου από τον Ευκλείδη , είναι σύμφωνος με τις αντιλήψεις του Αριστοτέλη , εκτός από την ασυμφωνία που λέει ότι το σημείο πρέπει να έχει θέση. Είναι όμως επαρκές αυτό , αν αναλογιστούμε ότι υπάρχουν κι άλλα πράγματα που είναι χωρίς μέρη ή αδιαίρετα (π.χ. το «τώρα»-στιγμή στον χρόνο και η μονάδα ως αριθμός;) Εδώ Πρόκλος απαντά: (93, 18) ότι το σημείο είναι το μόνο αντικείμενο της Γεωμετρία που είναι αδιαίρετο [13]
Επίσης ο ορισμός του Ευκλείδη , έχει δεχθεί πάρα πολλές αρνητικές κριτικές επειδή είναι αρνητικός . Κι εδώ ο Πρόκλος απαντά:(94.10)[14]

---

[13] Το ακριβές πρωτότυπον χωρίον αναφέρει: «mÒnon oân tÕ shme‹on ¢mer ὲς κατὰ τ¾n gewmetρικὴ ν ὕλην καὶ ἡ μό νας κατὰ τὴ ν ἀριθμητικήν»

[14] Ὁ mὲν οὖν Εὐκλεί δης διὰ τῆς ¢pof £sewj tîn μεριστῶν ἐ σήμηνεν ἡμῖν τὴ ν ἀρχὴ ν πάσης τῆς ὑπο- κειμένης αὐτῷ φύσεως εἰς θεωρί αν. καὶ γὰρ οἱ ἀπο- φατικοὶ λό γοι προσήκουσι ταῖς ἀρχαῖς, ὥ ς ὁ Παρμε- νί δης ἡμᾶ ς ἀναδιδάσκει τήν τε πρωτί στην αἰτί αν καὶ τὴ ν ἐ σχάτην διὰ μό νων τῶν ἀποφάσεων παραδού ς. πᾶ σα γὰρ ἀρχὴ τῶν ἀπ' αὐτῆς καθ' ἑτέραν οὐσί αν ὑφέστηκεν καὶ αἱ τούτων ἀποφάσεις τὴ ν ἐ κεί νης ἡμῖν δηλοῦσιν ἰδιό τητα. tÕ g¦r a‡tion mὲν τούτων, oÙdὲν dὲ τούτων Øp£rcon, ὧν αἴτιό ν ἐ στι, γνώριμον πῶς γί νεται διὰ τοῦ τρό που τούτου τῆς διδασκαλί ας.
Ἴσως δ' ἄν τις ἀπορήσειεν, πῶς πάντα μορφωτι- κῶς καὶ μεριστῶς τῆς φαντασί ας δεχομένης ἀμερές τι σημεῖον ὁ γεωμέτρης ἐ ν αὐτῇ θεωρεῖ. μὴ γὰρ ὅτι τοὺς ἐ ν διανοί ᾳ λό γους, ἀλλὰ καὶ τὰς τῶν νοερῶν καὶ θεί ων εἰδῶν ἐ μφάσεις ἡ φαντασί α κατὰ τὴ ν οἰκεῖαν δέχεται φύσιν, tîn mὲν ¢mÒrfwn morf¦j tîn dὲ ἀσχηματί στων σχήματα προτεί νουσα. πρὸ ς δὴ ταύτην τὴ ν ἀπορί αν λέγομεν, ὅτι τῆς φανταστικῆς κινήσεως

Ότι οι αρνητικές περιγραφές είναι καλύτερες κατά όσον αφορά τον ορισμό των πρώτων αρχών και ισχυρίζεται και ότι ο Παρμενίδης έχει περιγράψει την πρώτη και την τελευταία αιτία με αρνητικό τρόπο. Ο Αριστοτέλης παραδέχεται ότι μπορεί κάποιες φορές που κάποιος θέλει να διατυπώσει έναν ορισμό να το κάνει μέσω αρνήσεων (De anima III.6 430b .20)[15] «Το σημείο και κάθε διαίρεση [στο μέγεθος ή στον χρόνο] και οτιδήποτε είναι αδιαίρετο με αυτή την έννοια δηλούται ως στέρηση.
Ο Σιμπλίκιος (σύμφωνα με τον Nairizi) λέει ότι ένα σημείο είναι η αρχή ενός μεγέθους και από αυτό αυξάνουν (τα μεγέθη) . Είναι επίσης το μόνο πράγμα το οποίο έχοντας θέση δεν είναι διαιρετό. Αυτός, όπως κι ο Αριστοτέλης , προσθέτει, ότι μόνο με την κίνησή του ένα σημείο μπορεί να παράξει ένα μέγεθος.Το πρωταρχικό μέγεθος μπορεί να είναι μία γραμμή , εφ΄όσον το σημείο δεν μπορεί να επεκτείνει τον εαυτό του.
Ο Σιμπλίκιος παρατηρεί , ότι ο Ευκλείδης, όριζε το σημείο αρνητικά, διότι έφθασε σε αυτό με την διαδικασία απόσπασης επιφάνειας από στερεό, γραμμής από επιφάνεια και –τέλος- σημείο από γραμμή. «Από τότε το στερεό έχει τρεις διαστάσεις και ακολουθεί ότι ένα σημείο (στο οποίο φθάνει αφού έχει περιορίσει διαδοχικά και τις τρεις διαστάσεις) ότι δεν έχει καμία διάσταση και κανένα μέρος.»
Αυτό φυσικά επανεμφανίζεται σε μοντέρνες θεμελιώσεις της γεωμετρίας:
Ένας Nairizi προσθέτει μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση:
«Αν ένας θέλει να μάθει την σπουδαιότητα ενός σημείου, δηλ. ένα πράγμα περισσότερο απλό από ό,τι μια γραμμή, άφησέ τον να πιστεύει στο κέντρο του σύμπαντος και στους πόλους[16]. Αλλ΄ ουδέν καινόν υπό

---

[15] Το σχετικό χωρίον έχει ως εξής: «<τὸ dὲ μὴ κατὰ τὸ ποσὸ ν ἀδιαί ρετον ἀλλὰ τῷ εἴδει νοεῖ ἐ ν ἀδιαιρέτῳ χρό νῳ καὶ ἀδιαιρέτῳ <τῳ> τῆς ψυχῆς.>
¹ dὲ στιγμ¾ ka˜ p©sa dia…resij, καὶ
τὸ οὕτως ἀδιαί ρετον, δηλοῦται ὥσπερ ἡ στέρησις»

[16] αντιδιαμετρικά σημεία σφαίρας

τον ήλιον : Η ίδια η ιδέα που αναφέρεται, είναι Αριστοτελικής εμπνεύσεως, όπου ο Αριστοτέλης αντικρούοντας αυτούς που φαντάζονται ότι οι πόλοι έχουν κάποια επιρροή στην κίνηση κάποιας σφαίρας («Όταν οι πόλοι δεν έχουν μέγεθος, αλλά είναι άκρα και σημεία») (De motu animalium 3,669 a 21.)[17]

Σύγχρονες απόψεις:

Στην σύγχρονη Γεωμετρία, έχουμε έξοχες θεμελιώσεις που βασίζονται στο νέο σύστημα της αξιωματικής θεμελίωσης το οποίο υπήρξε κατάκτηση κατά την διάρκεια των τελευταίων[18] ετών. Χρειάζεται μόνο να αναφέρουμε τον Pasch , Veronese, Enriques , και Hilbert . Εδώ τα σημεία θεμελιώνονται (ορίζονται) πριν τις γραμμές. Η αμυδρή προσπάθεια να τα ορίσουμε a priori δεν είναι εφικτή. Αντί γι αυτό, τα πιο κοντινά πράγματα στην φύση, που αναφέρονται σε αυτά είναι αυτά που μας βοηθούν να αποκρυσταλλώσουμε μια αντίληψη και μια ιδέα γι΄αυτά.

Η πλήρης αναφορά –δήλωση που αφορά στην αντίληψη ενός σημείου, στον Weber και Wellstein έχει ως εξής:

Η αντίληψή μας για το σημείο, μπορεί να εξελιχθεί στην αντίληψη ενός αληθινού ή υποτιθέμενου υλικού σημείου, με την διαδικασία των ορίων. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να γίνει με τον εγκέφαλό μας που θέτει ένα όριο σε απεριόριστες προσεγγίσεις. Αν υποθέσουμε ότι ένας κόκκος άμμου γίνεται όλο και διαρκώς μικρότερος . Με αυτό τον τρόπο εξαλείφεται η πιθανότητα ύπαρξης ακόμη μικρότερων ατόμων στον

---

[17] Το πρωτότυπο χωρίον είναι το εξής: «ἀλλ' ὅ τι τοὺς πό λους οἴονταί τινα δύ ναμιν ἔ χειν, oÙqὲν œcontaj mšgeqoj ¢ll' ὄ ντας ἔ σχατα καὶ στιγμάς»

[18] σε σχέση με την χρονολογία της έκδοσης των σχολίων του Heath (1952)

κόκκο της άμμου. Έτσι διαμορφώνεται η ιδέα –με περισσότερη σιγουριά- η θεώρηση του σημείου ως μια ορισμένη θέση στον χώρο, μοναδική, και μη επιδεχόμενη περαιτέρω διαιρέσεως. Αλλά βέβαια κι αυτή η θεώρηση είναι ελαττωματική. Είναι αλήθεια , ότι έχουμε μια ιδέα, ότι ο κόκκος της άμμου γίνεται όλο και διαρκώς μικρότερος , ώστε να γίνεται ελάχιστα ορατός. Μετά από αυτό το σημείο, είμαστε ουσιαστικά σ το σκοτάδι. Δεν είναι δυνατόν να φανταστούμε πώς γίνεται μεγαλύτερη μείωση των κόκκων. Το ότι αυτή η διαδικασία θα τελειώσει, είναι αδιανόητη. Παρ όλα ταύτα, υπάρχει ένα όριο, πέρα από το οποίο , δεν μπορώ να πάω. Εμείς πρέπει να πιστέψουμε σ΄ αυτό ή να το ζητήσουμε (αιτηθούμε) , χωρίς να έχουμε φθάσει ποτέ σ΄ αυτό. Αυτό είναι καθαρά μια πράξη αποχής (θέλησης) κι όχι μια πράξη κατανόησης.
Ο Max Simon παρατηρεί, ότι κατανόηση του σημείου ανήκει στα όρια της αντίληψης του ανθρώπου.

Ορισμός 2

Ευκλείδης: «Γραμμή δε , μήκος απλατές»

Ο Heath παρατηρεί , ότι αυτός ο ορισμός μπορεί να αποδοθεί στην Πλατωνική σχολή , αν όχι στον ίδιο τον Πλάτωνα. Ο Αριστοτέλης (Τοπικά VI.6, 143b11) αναφέρεται σε αυτόν , ως να είναι ανοικτός σε αμφισβητήσεις , διότι αυτός ο ορισμός «διαιρεί το γένος με άρνηση» (δηλ. ότι η γραμμή είναι χωρίς πλάτος) . Εκτιμά ο Heath , ότι αυτή την αντίρρηση την έθεσε για να πάρει πόντους έναντι των Πλατωνιστών. (ibid 143b29)

Εναλλακτικοί ορισμοί.

Σύμφωνα με τον Πρόκλο είναι «μέγεθος εφ΄έν διαστατόν» (αφού η λέξη διάσταση χρησιμοποιείται σε σχέση με την γραμμή την επιφάνεια και το στερεό. (Αυτό σπάνια αποδίδεται έτσι) «Ένας Nairizi» το αποδίδει στον «Ηρωμίδη» (που πρέπει να είναι ο «Ηρούνδης» στον οποίο πάλι ο Ναιριζί απέδωσε άλλο ορισμό του σημείου όπως προαναφέραμε)
Επίσης αναφέρεται στην άποψη του Αριστοτέλη ότι η γραμμή είναι μέγεθος διαιρετό με ένα τρόπο («μοναχή διαιρετόν») σε αντίθεση με τα μεγέθη που είναι διαιρετά με δύο τρόπους («διχή διαιρετόν») που είναι μια επιφάνεια ή στερεό που είναι διαιρετό με όλους ή με τους τρεις τρόπους («παντί και τριχή διαιρετόν») (Μετά τα φυσικά 1016b25-27)[19] και (Μετά τα φυσικά 1020 a11)[20]
Επίσης αναφέρεται στο λεχθέν υπό του Πρόκλου για «ρύσιν σημείου) που την αποδίδει στον Αριστοτέλη (De anima I.4 409a4)[21]
Επίσης αναφέρεται σε μνεία που κάνει ο Πρόκλος σχετικά με τον Απολλώνιο (100, 5-19)[22]

---

[19] Το σχετικό χωρίο: «τὸ mὲν πάντῃ καὶ ἄθετον λέγεται μονάς, τὸ dὲ πάντῃ καὶ θέσιν ἔ χον στιγμή, τὸ dὲ μοναχῇ γραμμή, τὸ dὲ διχῇ ἐ πί πεδον, τὸ dὲ πάντῃ καὶ τριχῇ διαιρετὸ ν κατὰ τὸ ποσὸ ν σῶμα· καὶ ἀντιστρέψαντι δὴ τὸ mὲν διχῇ διαιρετὸ ν ἐ πί πε-δον, τὸ dὲ μοναχῇ γραμμή, τὸ dὲ μηδαμῇ διαιρετὸ ν κατὰ τὸ ποσὸ ν στιγμὴ καὶ μονάς, ἡ mὲν ἄθετος μονὰς ἡ dὲ θετὸ ς στιγμή.»

[20] Το σχετικό χωρίο από τον Αριστοτέλη έχει ως εξής: «Ποσὸ ν λέγεται τὸ διαιρετὸ ν εἰς ™nup£rconta ïn ˜k£teron À ›kaston ›n ti ka^ tÒde ti pšfuken eἶναι. πλῆθος mὲν οὖν ποσό ν τι ἐ ὰν ¢riqmhtÕn Ï, mšgeqoj dὲ ἂν μετρητὸ ν ᾖ. l šgetai dὲ πλῆθος μὲν τὸ διαιρετὸ ν δυνάμει εἰς μὴ συν-εχῆ, mšgeqoj dὲ τὸ εἰς συνεχῆ· megšqouj dὲ τὸ μὲν ἐ φ' εn sunecὲς μῆκος τὸ δ' ἐ πὶ δύο πλάτος τὸ δ' ἐ πὶ τρί α βάθος. toÚtwn dὲ πλῆθος μὲν τὸ peperasmšnon ¢riqmÕj mÁkoj dὲ γραμμ¾ pl£toj dὲ ἐ πιφ£neia b£qoj dὲ σῶμα»

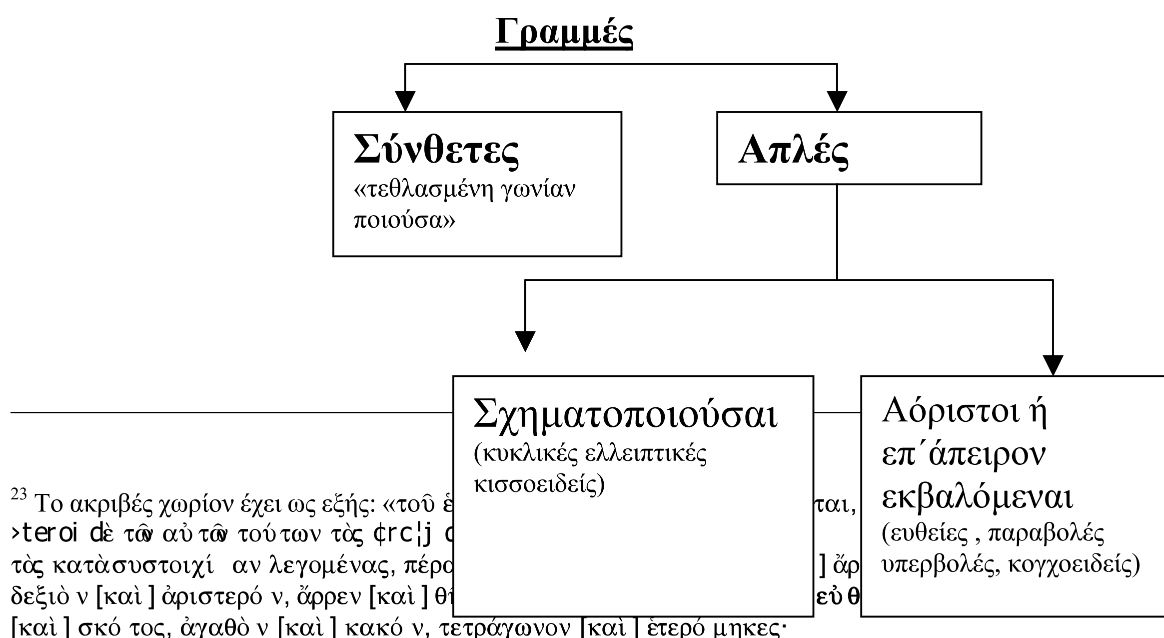
[21] Το ακριβές χωρίον: «ἐ πεί φασι κινηθεῖσαν γραμμὴ ν ἐ πί πεδον ποιεῖν, stigm¾n dὲ γραμμήν, καὶ αἱ τῶν μονάδων κινήσεις γραμμαὶ ἔ σονται·»

[22] Το ακριβές χωρίον κι εδώ έχει ως εξής: «ἔ χειν λέγεται. Τοσαῦτα περὶ τῆς γραμμῆς εἰρήσθω κατὰ τὰς θεωρικωτέρας ἐ πιβολάς. ἀποδεξώμεθα dὲ καὶ τοὺς περὶ ᾿Απολλώνιον λέγοντας, ὅ τι γραμμῆς ἔ ννοιαν mὲν ἔ χομεν, ὅ ταν τὰ μήκη μό νον ἢ τῶν ὁ δῶν ἢ τῶν τοί χων ἀναμετρεῖν κελεύ ωμεν· οὐ γὰρ προσποιού μεθα τό τε τὸ πλάτος, ἀλλὰ τὴ ν ἐ φ' ž ν διάστασιν ἀναλογιζό μεθα, καθάπερ δὴ καὶ ὅ ταν χωρί α μετρῶμεν, τὴ ν ἐ πιφάνειαν ὁ ρῶμεν, ὅ ταν dὲ φρέατα, τὸ στερεό ν. πάσας γὰρ ὁ μοῦ τὰς διαστάσεις συλλαβό ντες ἀποφαι-νό μεθα τοσό νδε eἶναι τὸ διάστημα τοῦ φρέατος κατά τε μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος. αἴσθησιν dὲ αὐ τῆς λάβοιμεν ἂν ἀπιδό ντες εἰς τοὺς διορισμοὺς τῶν πεφω-τισμένων τό πων ἀπὸ τῶν ἐ σκιασμένων καὶ ἐ πὶ τῆς σελήνης καὶ ἐ πὶ τῆς γῆς. τοῦτο γὰρ τὸ μέσον κατὰ mὲν πλάτος ἀδιάστατό ν ἐ στι, μῆκος dὲ ἔ χει τὸ συμ-παρεκτεινό μενον τῷ φωτὶ καὶ τῇ σκιᾷ.»

Είδη γραμμών:

Ο Ευκλείδης, δεν θεώρησε αναγκαίο τον διαχωρισμό των γραμμών σε είδη, ενώ αντίθετα ο Ήρων τις ταξινομεί σε ευθείες και μη. Μια περαιτέρω διαίρεση των «και μη» σε ελικοειδής και κυκλοειδείς καμπύλες . αναφέρεται στον Αριστοτέλη που λέει για τους Πυθαγόρειους ότι έλεγαν τους όρους ευθύ και καμπύλο (Μετά τα φυσικά $986^{α}25$)[23] . Επίσης αυτή η διάκριση φαίνεται και στην Πολιτεία του Πλάτωνα (Republix 602 c) [24]
Επίσης αναφέρεται στην ταξινόμηση που έκανα οι Αριστοτέλης και Πλάτων σε **ευθείες, περιφερείς και μικτές.**
Παραθέτει δε τις ταξινομήσεις κατά Γέμινο ($1^{η}$ και $2^{η}$, που είναι οι εξής)

Πρώτη , κατά Γέμινον ταξινόμηση

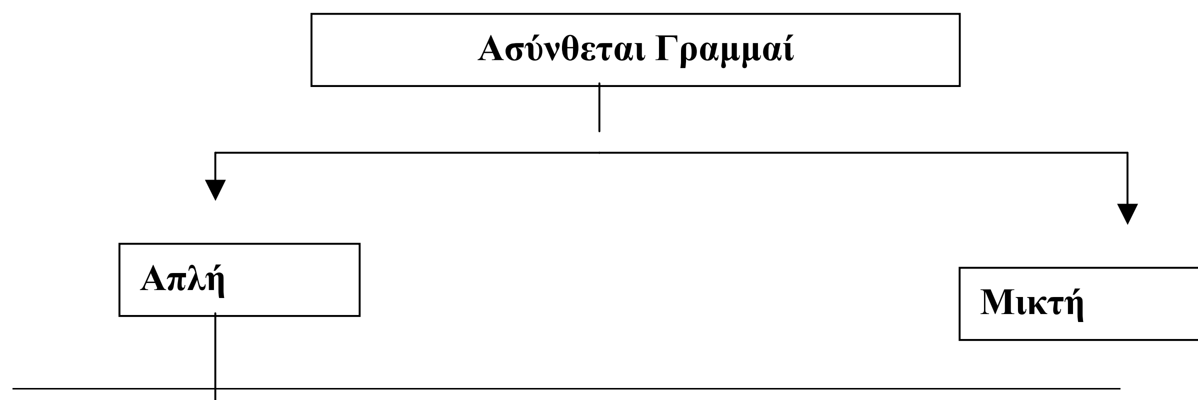


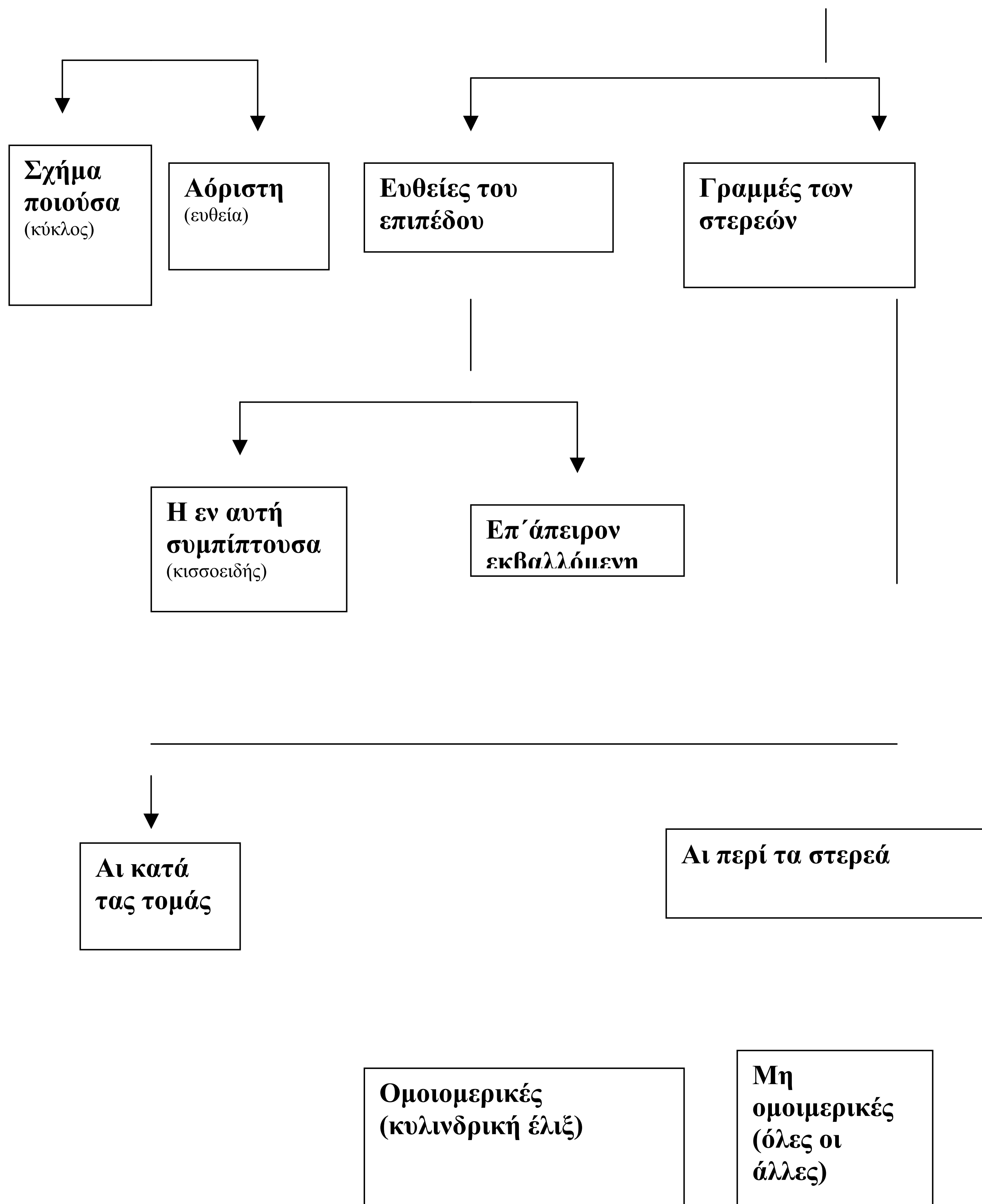
[23] Το ακριβές χωρίον έχει ως εξής: «τοῦ ἑ ... ται, ›teroi dὲ τῶν αὐτῶν τούτων τὰς ¢rc¦j ... τὰς κατὰ συστοιχί αν λεγομένας, πέρα ...] ἄρ... δεξιὸ ν [καὶ] ἀριστερό ν, ἄρρεν [καὶ] θ... εὐθ... [καὶ] σκό τος, ἀγαθὸ ν [καὶ] κακό ν, τετράγωνον [καὶ] ἑτερό μηκες·

[24] «Καὶ ταὐτὰ καμπύλα τε καὶ εὐθέαί …..»

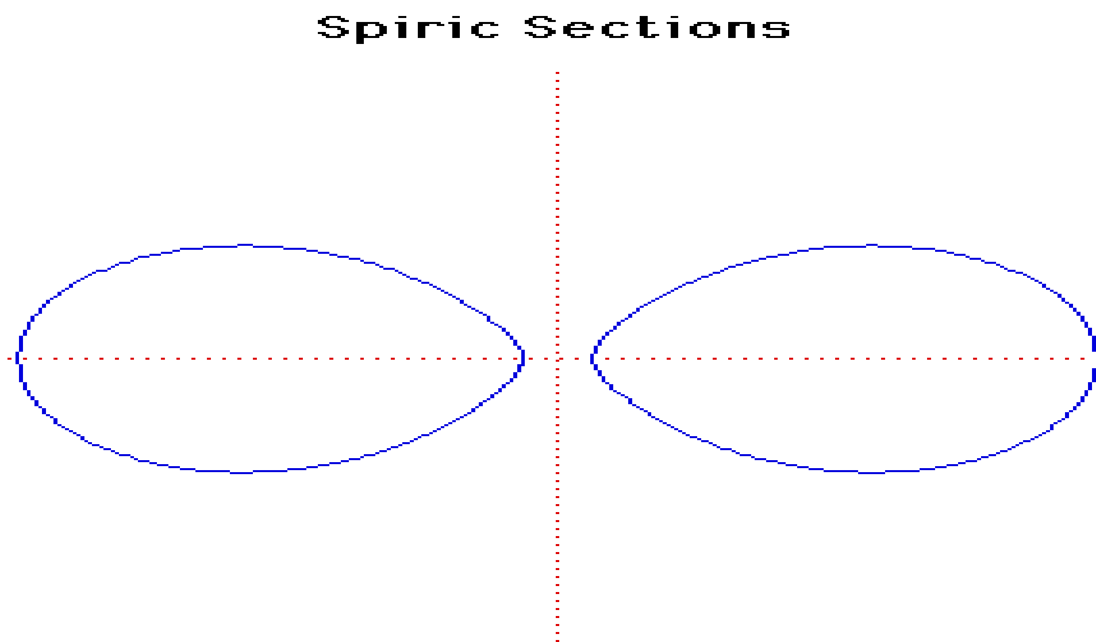
Κάποιες λεπτομέρειες που δεν μπορούν να αποδοθούν στο διάγραμμα είναι ότι μερικές «επ΄άπειρον εκβαλλόμενες» δεν σχηματίζουν σχήμα (ευθεία παραβολή υπερβολή) ενώ κάποιες άλλες σχηματίζουν βρόγχο και οι άλλες (της οικογένειάς τους) εκβάλλονται επ΄άπειρον. (κογχοειδής του Νικομήδη , την οποία είχε χρησιμοποιήσει ο Νικομίδης για τον διπλασιασμό του κύβου και την τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας))

<u>Δεύτερη , κατά Γέμινον ταξινόμηση:</u>




Σχήμα ποιούσα
(κύκλος)
Αόριστη
(ευθεία)
Ευθείες του επιπέδου
Γραμμές των στερεών
Η εν αυτή συμπίπτουσα
(κισσοειδής)
Επ΄άπειρον εκβαλλόμενη
Αι κατά τας τομάς
Αι περί τα στερεά
Ομοιομερικές
(κυλινδρική έλιξ)
Μη ομοιμερικές
(όλες οι άλλες)

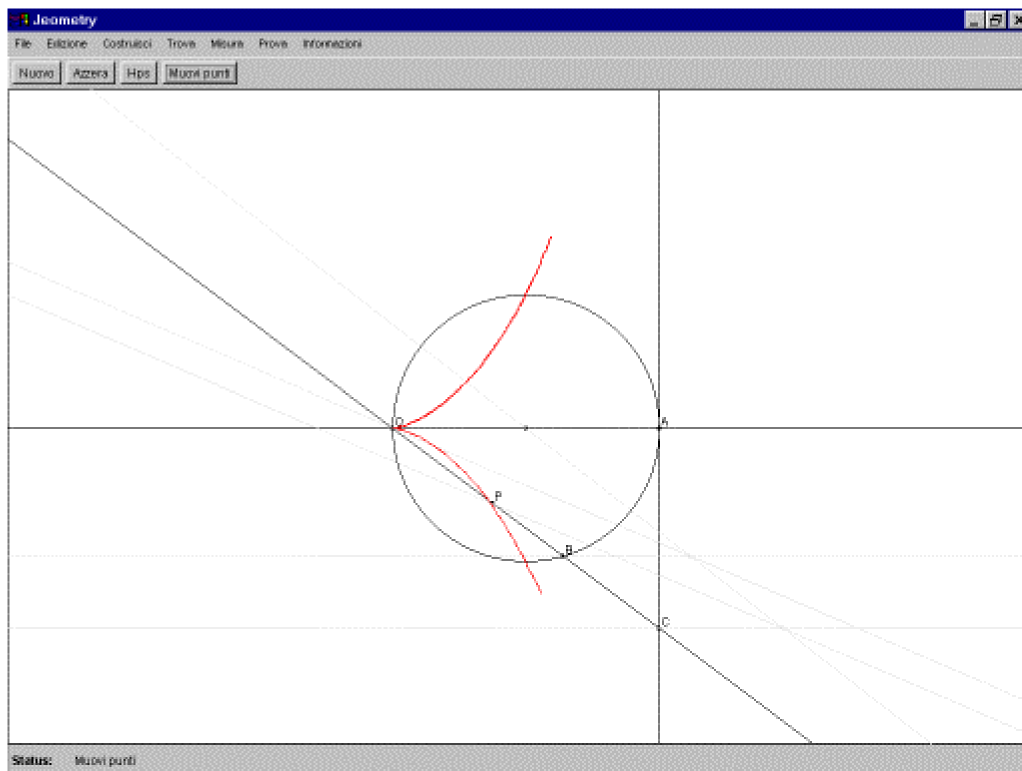
Ομοιοερικές ή ομοιομερείς λέγονται αυτές που είναι όμοιες σε όλα τα μέρη τους υπότην έννοια ένα μέρος τους να μπορεί να συμπίπτει με κάποιο άλλο. (ευθεία, τόξα του ιδίου κύκλου) εδώ έχομε δύο απλές, (ευθεία και κύκλο) και μια μεικτή (κυλινδρική έλιξ- κοχλιοειδής)



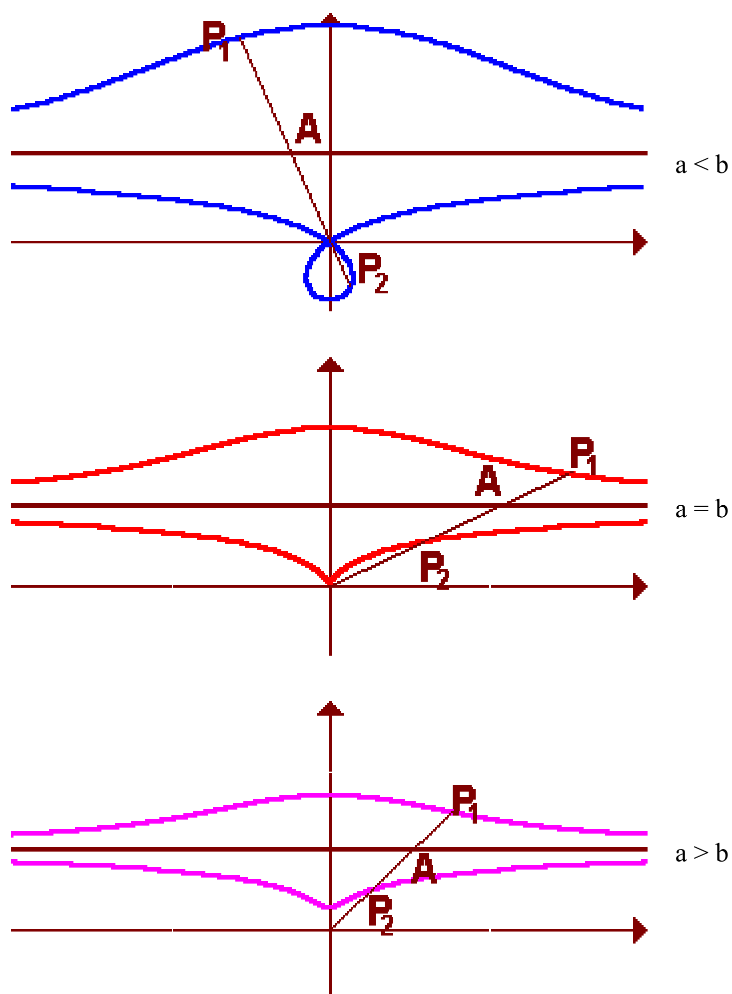
Ιπποπέδη καμπύλη έχουσα εξίσωση$(r^2 - a^2 + c^2 + x^2 + y^2)^2 = 4r^2(x^2 + c^2)$

Μια άλλη ιστορική καμπύλη , **η κισσοειδής του Διοκλέους** με εξίσωση: $y^2(a - x) = x^3$

Είναι η παρακάτω:



Jeometry
File Edizione Costruisci Trova Misura Prova Informazioni
Nuovo Azzera Hps Muovi punti
O
A
P
B
C
Status: Muovi punti



P1
A
P2
a < b
P1
A
P2
a = b
P1
A
P2
a > b

Εξισωση:

$$(y - a)^3 \cdot (x^2 + y^2) = b^2 - y^2$$

$$b = |AP_1| = |AP_2|$$

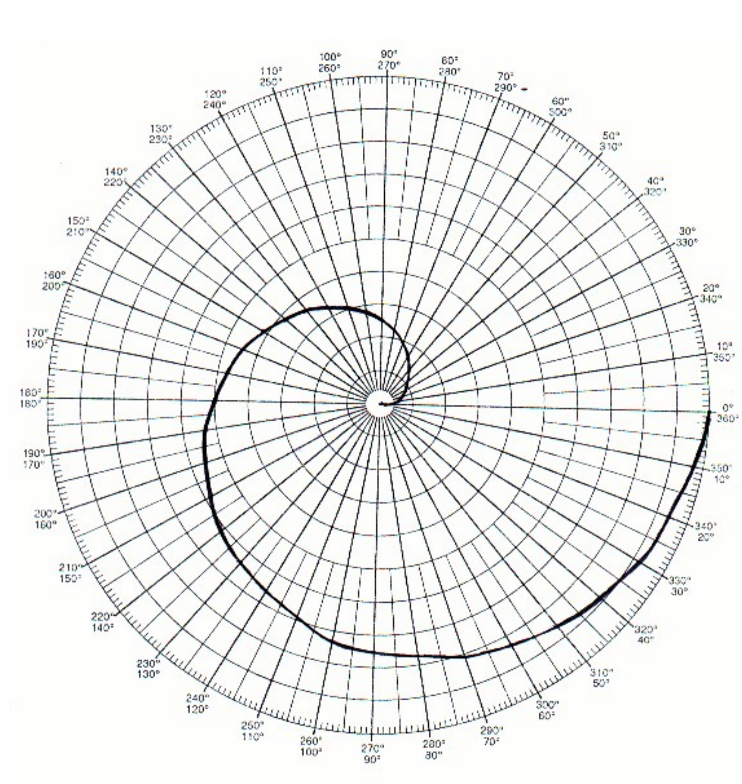
το μήκος b είναι σταθερό κατά μέγεθος, η δε P_1P_2 στρέφεται γύρω από το

Ο . Ο Γ. Τ. των P_1 και P_2 είναι η κογχοειδής.

ασύμπτωτη:

$$y = a$$

Τρεις περιπτώσεις για την **Κογχοειδή του Νικομήδη** .



Έλιξ του Αρχιμήδους

<u>Ορισμός 3</u>

«Γραμμής δε πέρατα, σημεία»

Εδώ ο Αριστοτέλης μας λέει ότι είναι αντιεπιστημονικό, να ορισθεί ένα σημείο ως πέρας γραμμής, διότι έχουμε διάπραξη προθύστερου σχήματος , ορίζοντας το πρότερον , ύστερον[25] Ο Ευκλείδης λοιπόν, εισήγαγε τον ορισμό ενός σημείου διαφορετικά , και επειδή έπρεπε να ενώσει σημείο με γραμμή εισήγαγε αυτή την εξήγηση, αφού δόθηκαν ορισμοί και για τα δύο.Αυτός ο συμβιβασμός είναι δική του ιδέα χωρίς αμφιβολία . Το ίδιο συμβαίνει και σε μια επιφάνεια σε σχέση με γραμμή (για τα πέρατα) όπως και σε σχέση ενός στερεού με μια επιφάνεια . Εμείς έτσι χάνουμε μια αναφορά , ότι μια διαίρεση γραμμής εκτός από την αρχή καιτο τέλος της, ότι είναι ένα σημείο. Ο Αριστοτέλης μας λέει ότι η τομή δύο ευθειών είναι σημείο (Μεταφυσικά 1060 b15)[26]
αν αυτές οι εξηγήσεις είχαν δοθεί, τότε ο Πρόκλος θα είχε ξεπεράσει τις δυσκολίες που βρίσκει , ότι κάποιες από τις γραμμές που χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης, (Αόριστες και κυκλικές) δεν έχουν πέρατα. Επίσης η καμπύλη που ο Πρόκλος ονομάζει «θυρεό» (=έλλειψη) δεν θα είχε δυσκολία.
Τελικά ο Πρόκλος φρονεί, ότι κατ΄ουσίαν ο Ευκλείδης μας δηλώνει , ότι μια γραμμή(ευθ. τμήμα) έχει πέρατα κι αυτά είναι σημεία.

[25] βλέπε και υποσημείωση υπ΄αριθμ.5
[26] («aƒ dè στιγμα΄ [εννοειται ειναι τομαι] γραμμω̂ν»),

Ορισμός 4

Ευθεία γραμμή έστιν, ήτις εξ ίσου τοις εφ'αυτής σημείοις κείται.

Ο μόνος ορισμός της ευθείας που μπορεί να χαρακτηριστεί προευκλειδικός είναι αυτός του Πλάτωνα ο οποίος ως ευθεία ορίζει τη γραμμή της οποίας το μέσον καλύπτει τα ακρα (αν υποθεσουμε ότι κάποιος μπορεί να κοιτάξει κατα μήκος της ευθείας και από τα δύο της άκρα). Ο ίδιος ορισμός κάνει επίσης την εμφάνισή του στον Παρμενίδη 137 Ε ως εξής : ευθεία είναι οποιδήποτε γραμμή της οποίας το μεσο βρίσκεται μπροστά (έτσι ώστε να εμποδίζει τη θέα τους) και από τα δύο άκρα της (ευθύ γε ου αν το μέσον αμφοίν τοιν εσχάτοιν επίπροσθεν η). Ο Αριστοτέλης παραθέτει το άνωθεν με ανάλογους όρους (κεφ. VI.II, 148b 27): ου το μέσον επιπροσθεί τοις πέρασιν. Το γεγονός ότι δεν αναφέρει το όνομα του Παρμενίδη όπως επίσης και το ότι παραθέτει τον ορισμό σε συνδυασμό με τον ορισμο της ευθείας ως το άκρο μιας επιφάνειας, μας αφήνει να υποθέσουμε ότι οι ορισμοί αυτοί ήταν εξαιρετικά γνωστοί. Ο Proclus επίσης αναφέρεται στον ορισμό αυτό με όρους του Πλάτωνα: ης τα μέσα τοις άκροις επιπροσθεί. Ο ορισμός αυτός είναι ευφυής αλλά σχετίζεται με την αίσθηση της όρασης και επικαλείται το(ως) αξίωμα ότι η γραμμή της όρασης είναι ευθεία (Cf. The aristotelian problems 31, 20, 959, 39 όπου προκύπτει το ερώτημα γιατί μπορούμε να παρατηρήσουμε καλύτερα την ευθύτητα /ευθυγράμιση σε μια σειρά πχ γραμμάτων με το ένα μάτι παρά και με τα δύο μαζί.) Αναφορικά με την ευθύτητα /με το κατά πόσο είναι ευθείες των 'οπτικών ακτίνων', *όψεις*, cf. ο Ευκλείδης στα Οπτικά του υιοθετεί τον όρο *υπόθεσις* και είναι ο πρώτος που κανει λόγο για 'ευθείες γραμμές' εικονικά προεκτεινόμενες απ'τα μάτια χωρίς

να χρησιμοποιεί τη λέξη *όψεις* και υποστηρίζει πως στο σύνολό τους δίνουν σχήμα κώνου του οποίου η κορυφή βρίσκεται στα μάτια

Καθώς ο Αριστοτέλης δεν αναφέρει κανένα ορισμό της ευθείας παρόμοιο με του Ευκλείδη παρά μόνο αυτόν του Πλάτωνα και αυτόν που ορίζει την ευθεία ως ‘άκρο μιας επιφάνειας’ δεν μπορούμε να αμφισβητήσουμε ότι ο ορισμός του Ευκλείδη ανήκει αποκλειστικά σε αυτόν και σημείο ‘εφόρμησης’ για τον μαθηματικό

Η τοποθέτηση του Προκλου πάνω στον ορισμό του Ευκλείδη

Οι ερμηνείες του ορισμού του Ευκλείδη (ευθεία γραμμή έστιν, ήτις εξ ίσου τοις εφ’ εαυτής σημείοις κείται) είναι πολλές σε αριθμό αλλά καμιά αρκετά ικανοποιητική ώστε να την αναφέρουμε. Μερικές αυθεντίες μάλιστα όπως πχ ο Savile έχουν ομολογήσει πως δεν μπορούν να κατανοήσουν πλήρως τον ορισμό ώστε να κάνουν περαιτέρω χρήση του. Είναι αρκετά φυσικό ο Πρόκλος να είναι ο πρώτος που ασχολήθηκε και διαπιστώνουμε ότι όντως η ερμηνεία του με την πρώτη ματιά φαίνεται αληθοφανής και γίνεται πειστική. Υποστηρίζει πως ο Ευκλείδης « αποδεικνύει με τον τρόπο αυτό ότι μόνο η ευθεία γραμμή καταλαμβάνει απόσταση (*κατέχειν διάστημα*) ίση με αυτή ανάμεσα στα σημεία της.» Γιατί, όσο τα σημεία της απέχουν μεταξύ τους, τόσο μεγάλο είναι και το μήκος (*μέγεθος*) της ευθείας της οποίας αποτελούν τα πέρατα.(Η απόσταση μεταξύ των σημείων μιας ευθείας της οποίας αποτελούν και τα πέρατα καθορίζει και το μήκος της ευθείας) Και αυτό ακριβώς αποτελεί και την ερμηνεία του *εξ ίσου* ως προς τα σημεία της ευθείας (το εξ ίσου επομένως/εμφανώς πρέπει να ερμηνευθεί ως ίση απόσταση) . «Όμως αν πάρεις δύο σημεία περιφέρειας κύκλου ή

οποιασδήποτε άλλης γραμμής και απομονώσεις την απόσταση μεταξύ τους πάνω στη γραμμή του θα διαπιστώσεις ότι αυτή είναι μεγαλύτερη το διάστημα που τα χωρίζει. Και αυτό συμβαίνει με όλες τις γραμμές εκτός της ευθείας. Από αυτό προκύπτει/εξ'ου και η συνήθης παρατήρηση, βασισμένη στην κοινή λογική, ότι αυτός που ταξιδεύει σε ευθεία γραμμή διανύει μόνο την απαραίτητη απόσταση ενώ αυτός που δεν ταξιδεύει ευθεία διανύει μεγαλύτερο διάστημα από το απαραίτητο.» (Cf Aristotle, De Caelo I, 4,27I a 3I, πάντα απόσταση θεωρούμε την ευθεία που μας χωρίζει από το σημείο στο οποίο αναφερόμαστε). Επομένως ο Πρόκλος θα ερμήνευε τον ορισμό κάπως έτσι: ευθεία είναι η γραμμή η οποία έχει έκταση ίση με (τις αποστάσεις που χωρίζουν) τα σημεία της. Αυτή η ερμηνεία μοιάζει να προσπαθεί να εμβολίσει στον ορισμό του Ευκλείδη την *υπόθεση* του Αρχιμήδη (*Σχετικά με τη σφαίρα και τον κύλινδρο I, ad init*) ότι από όλες τις γραμμές που έχουν τα ίδια άκρα η ευθεία είναι η μικρότερη. Για το λόγο αυτό το *εξ ίσου* πρέπει σαφώς να ερμηνευθεί ως 'ίση απόσταση' και το *κείται εξ ίσου* να θεωρηθεί αντίστοιχο του ΄εκτείνεται σε ίση απόσταση' ή 'αντιπροσωπεύει ίση απόσταση'. Αυτή η ερμηνεία είναι δύσκολη από μόνη της αλλά φαίνεται αδύνατη αν προσπαθήσουμε να την εφαρμόσουμε στον παρόμοιο ορισμό που έχει δώσει ο Ευκλείδης (Def7) για το επίπεδο ως επιφάνεια 'η οποία κείται εξ ίσου από τις ευθείες γραμμές που την αποτελούν '. Όσον αφορά αυτό τον ορισμό ο Πρόκλος τις ίδιες λέξεις ,*εξ ίσου κείται* , προσπαθεί να τις ερμηνεύσει ως 'εκτείνεται σε επιφάνεια/καταλαμβάνει χώρο ίσο με'. Υποστηρίζει δηλαδή (ρ.117,2) ότι, «εάν δύο ευθείες γραμμές ορισθούν πάνω σ'ένα επίπεδο, η επιφάνεια του επιπέδου θα καταλαμβάνει χώρο ίσο με αυτόν που βρίσκεται ανάμεσα στις δύο ευθείες γραμμές». Δύο ευθείες όμως από μόνες τους δεν μπορούν να καθορίσουν κανένα απολύτως χώρο · θα ήταν απαραίτητο να σχηματίζεται ένα *κλειστό* σχήμα με τα σύνορα/όρια του πάνω στο επίπεδο ώστε να υπάρχει αντιστοιχία

και με την άλλη υπόθεση του Αρχιμήδη σύμφωνα με την οποία ‘ ανάμεσα σε επιφάνειες που έχουν τα ίδια άκρα/πέρατα, εάν αυτές οι επιφάνειες βρίσκονται σε ένα επίπεδο, το επίπεδο είναι η πιο μικρή επιφάνεια(στο χώρο αυτό /στην περιοχή αυτή) ’ . Μια τέτοια ερμηνεία του εξ ίσου ακόμα και αν υποθέσουμε ότι σημαίνει ‘σε ίση απόσταση’ δεν θα μπορούσε να σταθεί σ’ αυτή την περίπτωση σε αυτό τον ορισμό. Η αναγκαιότητα επομένως να ερμηνεύσουμε το εξ ίσου ομοίως και στους δύο ορισμούς μάς εμποδίζει να θεωρήσουμε ότι αναφέρεται στην απόσταση ή το μήκος . Πρέπει επίσης να προσθέσουμε ότι ο Simplicious έδωσε τις ίδιες ερμηνείες με τον Πρόκλο.

Η γλώσσα και η σύνταξη του ορισμού

Ας εξετάσουμε τώρα τις actual λέξεις και τη γραμματική της φράσης ‘*ήτις εξ ίσου τοις εφ’εαυτοις σημείοις κείται’*. Σχετικά με την έκφραση *εξ ίσου* σημειώνουμε ότι ο Πλάτωνας και ο Αριστοτέλης (η χρήση της έκφρασης στα κείμενά τους είναι αρκετά συχνή) της δίνουν/τη χρησιμοποιούν εννοώντας μια ‘κατάσταση ισότητας’: δες *οι εξ ίσου* στους Νόμους του Πλάτωνα 777D, 919D· Αριστοτέλης, Πολιτεία 1259 b 5 *εξ ίσου είναι βούλεται την φύσην*, ‘τείνει να βρίσκεται σε ισορροπία με τη φύση,’ Eth.Nic. VIII. 12, 1161 και 8 *ενταύθα πάντες εξ ίσου*, ‘βρίσκονται σε μια κατάσταση ισότητας’. Ελαφρώς διαφορετική είναι η χρήση στον Αριστοτέλη, Eth.Nic.x.8,1178 & 25 *των μεν γαρ αναγκαίων χρεία και εξ ίσου έστω* ‘και οι δύο χρειάζονται το ίδιο τα απαραίτητα για τη ζωή ’, κεφάλαια IX, 15, 174, 32 *εξ ίσου ποιούντα την ερώτησην* ‘κάνοντας την ερώτηση με αδιαφορία’

(χωρίς ένδειξη προτίμησης). Επομένως η κανονική σημασία πλησιάζει περισσότερο σε εκφράσεις όπως εξισορροπημένα, ίσα ως προς το μέτρο, κρατώντας ίσες αποστάσεις, χωρίς κάποια κλίση κτλ.. Η δοτική *τοις εφ'εαυτής* συντάσσεται με το *εξ ίσου* ή με το *κείται*; Στην πρώτη περίπτωση η φράση πρέπει να σημαίνει 'αυτή που κείται εξίσου (αναφορικά με) από τα σημεία της, ενώ στη δεύτερη περίπτωση πρέπει να μεταφράσουμε 'αυτή η οποία ,μέσα στα σημεία της , είναι κατανεμημένη εξίσου/ομοιόμορφα'. Ο Max Simon παίρνει την πρώτη σύνταξη και δίνει το εξής νόημα: die Gerade liegt in gleicher Weise wie ihre Punkte.' Αν οι τελευταίες λέξεις σημαίνουν 'με τον ίδιο τρόπο όπως τα σημεία της' δεν βλέπω ότι μας λένε κάτι αν και ο Simon προσαρτά στις λέξεις την έννοια της *απόστασης* (Abstand) όπως ο Πρόκλος. Την δεύτερη σύνταξη την αντιλαμβάνεται ως εξής:'die Gerade ist liegt fur (durch) ihre Punkte gleichmassig gegeben worden','η ευθεία γραμμή κείται συμμετρικά ανάμεσα στα σημεία της' ή εάν θεωρήσουμε το *κείται* ως παθητικό του *τίθημι* , 'die Gerade ist durch ihre Punkte gleichmassig gegeben worden,' 'η ευθεία γραμμή καθορίζεται συμμετρικά από τα σημεία της'. Προσθέτει επίσης ότι η ιδέα εδώ είναι η *κατεύθυνση* και ότι και η *κατεύθυνση* και η *απόσταση* (ανάμεσα σε δύο διαφορετικά σημεία) θα ήταν για τον Ευκλείδη, όπως και για τον Bolzano αργότερα (*Berachtungen uber einige Gegenstande der Elementargeometrie*, 1804, εισαγωγή από τον Schotten, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*, II. P.16)κύριες ανάγωγες έννοιες.

Ενώ η γλώσσα είναι τόσο απελπιστικά ασαφής, μπορούμε ωστόσο με σιγουριά να πούμε ότι το είδος της έννοιας που επιθυμούσε να εκφράσει ο Ευκλείδης ήταν αυτό της γραμμής η οποία φέρει το ίδιο σχήμα σε όλα τα σημεία της χωρίς κανένα ακανόνιστο ή ασύμμετρο

στοιχείο να διαφοροποιεί τα μέρη και τις πλευρές μεταξύ τους /από κάποιο κομμάτι ή πλευρά της από κάποιο άλλο. Οποιαδήποτε τέτοια ασσυμετρία ανωμαλία/αρρυθμία θα γινόταν αμέσως αντιληπτή με την ένωση των άκρων και τη στροφή της γραμμής γύρω από αυτά· αν οποιεσδήποτε δύο θέσεις προεξείχαν, πχ. βρίσκονταν δεξιά ή αριστερά η μία της άλλης, 'τότε η γραμμή δε θα κείτονταν κατά ομοιόμορφο τρόπο ανάμεσα στα σημεία της'.

<u>Μία εικασία για την προέλευση και τη σημασία του(ορισμού)</u>

Η ερώτηση που προκύπτει είναι η εξής: ποιά είναι η προέλευση του ορισμού του Ευκλείδη ή αλλιώς πώς τον εμπνεύστηκε; Μου φαίνεται πως η πραγματική του βάση βρίσκεται στον ορισμό του Πλάτωνα σύμφωνα με τον οποίο 'ευθεία γραμμή είναι η γραμμή το κέντρο της οποίας καλύπτει τα άκρα'. Ο Ευκλείδης υπήρξε οπαδός του Πλάτωνα και τι πιο φυσικό από το να υιοθετήσει τον ορισμό του Πλάτωνα κατ' ουσίαν, θεωρώντας παράλληλα απαραίτητο να αλλάξει τη φόρμα των λέξεων έτσι ώστε να τον να τον απαλλάξει από οποιαδήποτε «παραπομπή»στην όραση που ως φυσικό φαινόμενο δεν μπορούσε να σταθεί σε έναν καθαρά γεωμετρικό ορισμό; Για το λόγο αυτό πιστεύω πως ο Ευκλείδης με τον ορισμό του προσπαθεί να εκφράσει, με όρους που ένας γεωμέτρης δεν θα μπορούσε να αμφισβητήσει ως μη γεωμετρικού αντικειμένου, το ίδιο πράγμα με τον Πλάτωνα.

Η αλήθεια είναι πως ο Ευκλείδης επιχειρούσε το ακατόρθωτο. Όπως λέει ο Pfleiderer (Σχόλια στον Ευκλείδη), «Μου φαίνεται πως η έννοια της ευθείας γραμμής, χάρη στην απλότητά της, δεν μπορεί να αποδοθεί με κανέναν κανονικό /συνήθη ορισμό ο οποίος δεν θα εισάγει

λέξεις που έχουν οι ίδιες ούτως ή άλλως την ανάγκη προσδιορισμού (όπως είναι η κατεύθυνση, η ισότητα, η ομοιομορφία ή η αντιστοιχία/ομαλότητα των θέσεων, η σταθερή πορεία)· μου φαίνεται ότι είναι αδύνατο, εάν ένα άτομο δεν ξέρει ήδη τι σημαίνει ο όρος ευθεία , να του εξηγήσεις χωρίς να χρησιμοποιήσεις με κάποιον τροπο μια εικόνα ή μια ζωγραφιά. Ανάλογα έχει παρουσιασθεί η ευθεία σε βιβλία όπως το Elementi di geometria του Veronese (Μέρος I., 1904, σελ. 10): 'Μια τεντωμένη χορδή, πχ. ένα μολύβδινο σύρμα, μια ακτίνα φωτός που εισχωρεί σε σκοτεινό δωμάτιο από μια μικρή τρύπα, όλα αυτά είναι ευθύγραμμα αντικείμενα. Το είδωλό τους μας δίνει την αφηρημένη ιδέα μιας περιορισμένης γραμμής που λέγεται ευθύγραμμο τμήμα.

Άλλοι ορισμοί

Θα τελειώσουμε αυτό το σχόλιο με κάποιους άλλους διάσημους ορισμούς της ευθείας γραμμής. Οι επόμενοι ανήκουν στον Πρόκλο (σελ.110, 18-23).

1. Επ' άκρον τεταμένη γραμμή. Ο ορισμός αυτός χρησιμοποιείται και από τον Ήρωνα με την προσθήκη των λέξεων 'επί τα πέρατα'.
2. Μέρος της δεν μπορεί να βρίσκεται σε ένα υποτιθέμενο επίπεδο εάν μέρος της βρίσκεται σε κάποιο υψηλότερο. Αυτό αποτελεί πρόταση στον Ευκλείδη.
3. Πάντα αυτής τα μέρη πάσιν ομοίως εφαρμόζει. Ο Ήρων χρησιμοποιεί τον ορισμό αυτό επίσης, μόνο που αντικαθιστά το 'ομοίως' με το με το 'παντοίως' ,(με οποιδήποτε τρόπο) το οποίο αποτελεί καλύτερη διατύπωση καθώς καταδεικνύει ότι τα μέρη της ευθείας εφαρμόζουν καθ' οιονδήποτε τρόπο, ακόμα και με τον αντίστροφο, χωρίς να αλλάζει το αποτέλεσμα .

4. Ευθεία γραμμή έστιν η των περάτων μενόντων και αυτή μένουσα. Η προσθήκη του Ήρωνα σε αυτό ‘οίον εν τω αυτώ επιπέδω στρεφομένη’(όταν περιστρέφεται περιστρέφεται πάντα στο ίδιο επίπεδο) και η ακόλουθη /παρακάτω παραλλαγή του ‘..τα ίδια άκρα έχουν πάντα την ίδια θέση’ δείχνουν ότι ο ορισμός της ευθείας γραμμής ως γραμμής που ‘δεν αλλάζει θέση όταν περιστραφεί γύρω από τα άκρα της ή από οποιαδήποτε δύο σημεία της’ δεν αποτελεί αυθεντική ανακάλυψη του Leibniz ή του Saccheri,του Krafft ή του Gauss, αλλά φτάνει πίσω στα πρώτα χριστιανικά χρόνια.. Η εκδοχή του Gauss για τον ορισμό είναι η εξής: η γραμμή στην οποία βρίσκονται όλα τα σημεία που, κατά τη διάρκεια της περιστροφής ενός σώματος (ενός μέρους του χώρου/διαστήματος) γύρω από δύο ορισμένα σημεία της, διατηρούν τη θέση τους αμετάβλητη ονομάζεται ευθεία γραμμή.’ Ο Schotten (I σελ.315) διατείνεται ότι η έννοια/θεωρία της ευθείας γραμμής και η ιδιότητά της να καθορίζεται από δύο σημεία ασυναίσθητα θεωρείται δεδομένο σε αυτό τον ορισμό οπότε πρόκειται για λογικό ‘κύκλο’.
5. Η γραμμή η οποία με μια άλλη του είδους της δεν είναι δυνατό να δώσουν σχήμα, η μετά της ομοειδούς μιάς σχήμα μη αποτελούσα. Αυτό αποτελεί ένα ξεκάθαρο ύστερον-πρότερον αφού προϋποθέτει την έννοια του σχήματος.

Τέλος ο ορισμός του Leibniz πρέπει να αναφερθεί: ευθεία γραμμή είναι αυτή που χωρίζει ένα επίπεδο σε δύο μισά ίδια σε όλα εκτός από τη θέση. Πέρα από το γεγονός ότι ο ορισμός αυτός εισάγει το επίπεδο, δε φαίνεται να έχει κάποιο πλεονέκτημα σε σχέση με τον τελευταίο ορισμό.

Ο Legendre χρησιμοποιεί την ιδιότητα της ευθείας όπως την διατύπωσε ο Αρχιμήδης: η μικρότερη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία.

Ο Van Swinden παρατηρεί (Elemente der Geometrie 1834, σελ.4) ότι το να εκλάβεις αυτό ως ορισμό προϋποθέτει ως δεδομένο την πρόταση ότι οι δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερες από την τρίτη και την απόδειξη ότι οι ευθείες γραμμές που έχουν δύο κοινά σημεία συμπίπτουν σε όλο τους το μήκος/ από άκρου εις άκρον (Legendre, Elements de Geometrie I., 3,8).

Όλοι οι άνωθεν ορισμοί επιβεβαιώνουν την παρατήρηση του Unger (Die Geometrie des Euklid, 1833): Η ευθεία είναι μία απλή έννοια και ως εκ τούτου/κατά συνέπεια όλοι οι ορισμοί είναι καταδικασμένοι ν'αποτύχουν….Αν όμως η 'πραγματική διάσταση' της ευθείας γραμμής έχει συλληφθεί έστω και μία φορά θα αναγνωριστεί σε όλες τις εκδοχές των ορισμών. Για το λόγο αυτό όλοι οι ορισμοί πρέπει να θεωρηθούν *εξηγήσεις* και ανάμεσά τους καλύτερος είναι αυτός από τον οποίο μπορούμε να αντλήσουμε/καταλήξουμε σε περρισότερα συμπεράσματα σχετικά με το τι είναι ευθεία.

<u>Ορισμός 8</u>

Επίπεδος δε γωνία έστιν η εν επιπεδω δύο γραμμών απτομένων αλλήλων και μη επ'ευθείας κειμένων προς αλλήλας των γραμμών κλίσις.

Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο γραμμών σε ένα επίπεδο οι οποίες συναντούν η μία την άλλη χωρίς να αποτελούν/σχηματίζουν ευθεία γραμμή.

Η φράση 'μη επ'ευθείας' είναι παράξενη αν υποθέσουμε πως ο ορισμός επιδιώκει να συμπεριλάβει γωνίες που σχηματίζονται τόσο από καμπύλες όσο και από ευθείες γραμμές. Θα περιμέναμε μία διατύπωση σαν το *συνεχείς* μεταξύ τους. Ο Ήρων πιστεύει πως κάπως έτσι πρέπει να αποδοθεί το πραγματικό νόημα της έκφρασης αφού περνάει στην

άμεση εξήγηση του τι θα σήμαινε το *ου συνεχείς*. Φαίνεται σαν όντως να σκόπευε ο Ευκλείδης να ορίσει την ευθύγραμμη γωνία, αλλά με μια δεύτερη σκέψη, ως παραχώρηση προς την τότε κοινή αναγνώριση των καμπυλόγραμμων γωνιών, άλλαξε τις 'ευθείες γραμμές' σε 'γραμμές' και χώρισε τον ορισμό σε δύο.

Νομίζω πως όλα τα στοιχεία υποδεικνύουν ότι ο ορισμός της γωνίας από τον Ευκλείδη ως κλίσης αποτελεί καινοτομία /μια νέα αφετηρία. Ο όρος αυτός δε συναντάται στον Αριστοτέλη και μπορούμε να συμπεράνουμε από τα γραπτά του ότι η ιδέα που συσχετιζόταν την εποχή εκείνη με τη γωνία ήταν μάλλον η απόκλιση ή το λύγισμα/κάμψη των γραμμών: βλέπε την συχνή χρήση του κεκλάσθαι και όλων των άλλων μορφών του ρήματος κλαω, όπως επίσης και την αναφορά του στην μία κεκλιμμένη γραμμή η οποία σχηματίζει γωνία (την κεκαμμένην και έχουσαν γωνίαν, Μεταφ. 1016&13).

Ο Πρόκλος πάνω στον ορισμό αυτό έχει γράψει ένα μεγάλο και λεπτομερή σχολιασμό τον οποίο ως επί το πλείστον αντλεί από τη δουλειά του δασκάλου Συριανού (ο ημέτερος καθηγήμων). Δύο κριτικές που περιέχονται στον σχολιασμό δεν επιφέρουν καμία δυσκολία. Μια από αυτές ρωτά πώς, εάν μια γωνία είναι μια κλίση, μία κλίση μπορεί να δώσει/παράγει δύο γωνίες. Η άλλη αναφέρεται στο γεγονός ότι ο ορισμός φαίνεται να αποκλείει τη γωνία που σχηματίζεται από την κλίση μιας και μόνο καμπύλης γραμμής, όπως πχ. ο απόλυτος/πλήρης κισσοειδής (σε αυτό που αποκαλούμε 'κορυφή καμπύλης') ή η καμπύλη γνωστή ως ιπποπέδη. Αλλά καμπύλες σαν αυτές ανήκουν σε μια υψηλότερου επιπέδου γεωμετρία την οποία ο Ευκλείδης εύλογα/δικαιολογημένα δεν υπολόγισε.

<u>Άλλοι αρχαίοι ορισμοί: Απολλώνιος, Πλούταρχος, Κάρπος</u>

Στο σχολιασμό του Πρόκλου καταγράφονται και άλλοι ορισμοί εξαιρετικού ενδιαφέροντος. Ο Απολλώνιος όρισε τη γωνία ως τη σύναψη μιας επιφάνειας ή ενός στερεού κάτω από το σημείο κλίσης/κάμψης γραμμής ή επιφάνειας (*συναγωγή επιφάνειας ή στερεού προς ενί σημείω υπό κεκλασμένη γραμμή ή επιφάνεια*), όπου και πάλι η γωνία υποτίθεται ότι σχηματίζεται από την κάμψη/απόκλιση μιας γραμμής ή μιας επιφάνειας. Ίσως ακόμα περισσότερο ενδιαφέρον είναι ο ορισμός 'από αυτούς που υποστηρίζουν ότι το πρώτο διάστημα υπό το σημείον είναι η γωνία'. Ανάμεσα σ'αυτούς συγκαταλέγεται και ο Πλούταρχος ο οποίος ισχυρίζεται ότι ο Απολλώνιος εννοούσε το ίδιο πράγμα. Γιατί, υποστηρίζει, πρέπει να υπάρχει μια πρώτη απόσταση κάτω από την απόκλιση των εμπλεκομένων γραμμών ή επιφανειών, αν και, όντας συνεχής η απόσταση κάτω από το σημείο, είναι αδύνατο να επιτυγχάνει/αποτελεί την πραγματική πρώτη αφού κάθε απόσταση μπορεί να διαιρείται επ'άπειρον. Υπάρχει μία ασάφεια ως προς τη χρήση της λέξης *απόσταση* (διάστημα), έτσι εκτιμήθηκε ότι 'εάν κάπως διαχωρίσουμε την *πρώτη* (απόσταση) και φέρουμε μία ευθεία γραμμή ενδιαμέσου της θα σχηματιστεί *τρίγωνο* και όχι μία γωνία Πέραν της αντιλογίας, δεν μπορώ παρά να βρω στην ιδέα του Πλάτωνα και των άλλων σπέρματα μιας αξιόλογης σύλληψης στην απειροστή ανάλυση, μια προσπάθεια (μολονότι αποσπασματική και ατελή) να φτάσουμε στην εκτίμηση/να εκτιμήσουμε την/της *απόκλιση διανύσματος* μεταξύ γραμμών στο σημείο συνάντησης τους ως μέτρο της γωνίας μεταξύ τους.

Μια τρίτη άποψη για τη γωνία είναι αυτή του Κάρπου από την Αντιόχεια ο οποίος είπε ότι 'η γωνία ήταν ένα *ποσόν*, ήτοι ένα *διάστημα* ανάμεσα στις γραμμές ή τις επιφάνειες που την περιέχουν. Αυτό σημαίνει

ότι θα μπορούσε να είναι διάστημα (ή απόκλιση διανύσματος) κατά μία έννοια (εφ'εν διεστώς), παρόλο που η γωνία δεν είναι εξ αιτίας αυτού/βάση αυτού μια ευθεία γραμμή. Γιατί οτιδήποτε επεκτείνεται προς μία κατεύθυνση (το εφ'έν διαστατόν) δεν είναι γραμμή. Όντας η φράση αυτή 'επεκτεινόμενη προς μία κατεύθυνση' ο ορισμός της γραμμής , η ιδέα του Κάρπου δικαιολογημένα θα χαρακτηριζόταν ως το μεγαλύτερο δυνατό παράδοξο (πάντων παραδοξότατον). Η δυσκολία φαίνεται να προέκυψε από την ανάγκη χρησιμοποίησης ενός διαφορετικού τεχνικού όρου για να εκφράσει μια νέα ιδέα. Ο Κάρπος αναμφισβήτητα φαίνεται να υιοθετεί την πιο μοντέρνα άποψη για την γωνία κατά την οποία η γωνία αντιπροσωπεύει *απόκλιση διανύσματος* παρά απόσταση/διάνυσμα και να αντιλαμβάνεται το *εφ'εν* ως *κατά μια έννοια* (*περιστροφικώς*) παρά *προς μία κατευθυνση* ή *κατά μία διάσταση* (γραμμικώς).

<u>**Σε ποιά κατηγορία ανήκει η γωνία;**</u>

Υπήρξε έντονη διαμάχη ανάμεσα στους φιλοσόφους για την ειδική κατηγορία (σύμφωνα με το σχεδιάγραμμα του Αριστοτέλη) στην οποία θα έπρεπε να καταταγεί η γωνία. Είναι δηλαδή ποσόν, ποιόν ή σχέση (προς τι);

1. Εκείνοι που την κατέταξαν στην κατηγορία του *ποσού* στήριξαν την άποψη τους στο γεγονός ότι μία επίπεδη γωνία τέμνεται από μία γραμμή και μία στερεή γωνία από μία επιφάνεια. Αφού τότε είναι μία επιφάνεια που τέμνεται από μία γραμμή και μία στερεά η οποία τέμνεται από μία επιφάνεια, ένιωσαν υποχρεωμένοι να συμπεράνουν ότι η γωνία είναι μία επιφάνεια ή ένα στερεό οπότε είναι και μέγεθος. Όμως τα ομογενή

πεπερασμένα μεγέθη, πχ. οι επίπεδες γωνίες πρέπει να φέρουν λόγο η μία προς την άλλη ή η μία πρέπει να είναι δυνατό να πολλαπλασιαστεί μέχρι να υπερβεί την άλλη. Ωστόσο αυτό δεν μπορεί να ισχύσει ούτε για την ευθύγραμμη γωνία ούτε για την κερατοειδή γωνία η οποία αργότερα επαναπροσδιορίστηκε ως ‘γωνία’ ανάμεσα σε ένα κύκλο και μία εφαπτόμενη σ’ αυτόν, αφού (Ευκλ ΙΙΙ.16) η τελευταία γωνία είναι μικρότερη από οποιαδήποτε ευθύγραμμη γωνία.. Η αντιλογία ωστόσο προϋποθέτει ότι τα δύο είδη γωνιών *είναι* ομογενή. Ο Πλούταρχος και ο Κάρπος κατατάσσονται ανάμεσα σε εκείνους οι οποίοι, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, τοποθέτησαν τη γωνία ανάμεσα στα μεγέθη. Και, όπως προαναφέρθηκε, ο Πλούταρχος ισχυριζόταν πως ο Απολλώνιος ήταν υποστηρικτής της άποψής του παρόλο που η λέξη *συστολή* (μιας επιφάνειας ή ενός στερεού) όπως χρησιμοποιήθηκε από τον τελευταίο δεν συνιστά μέγεθος πολύ περισσότερο απ’ ότι η *κλίση/κάμψη* του Ευκλείδη. Αυτός ο τελευταίος συλλογισμός αδιαμφισβήτητα οδήγησε τον «Αγάνη», προφανώς ‘φίλο’ του Σιμπλίκιου, να επεξηγήσει τα λόγια του Απολλώνιου ‘*μία ποσότητα που έχει διαστάσεις και τα άκρα της οποίας φτάνουν σε ένα σημείο.*’

2. Ο Εύδημος ο Περιπατητικός, ο οποίος έκανε μια ολόκληρη εργασία πάνω στη γωνία, διατεινόταν ότι ανήκε στην κατηγορία της ποσότητας. Ο Αριστοτέλης είχε δώσει ως τέταρτη του εκδοχή για το ποιόν « μορφή και σχήμα υπάρχουν/υφίστανται σε κάθε πράγμα, και, εκτός αυτών, ευθύτητα, καμπυλοτήτα και τα όμοια» (κατηγορίες8,10 &11). Λέει πως αναφερόμαστε σε κάθε ανεξάρτητο πράγμα ως *ίδιον* ως προς τη μορφή του και αναφέρει ως παράδειγμα το τρίγωνο και το τετράγωνο, χρησιμοποιώντας τα και αργότερα (*ibid.*ΙΙ&5) για να δείξει ότι

δεν επιδέχονται όλα τα είδη/όλες οι ιδιότητες το *περισσότερο* και το *λιγότερο*. Στα *Φυσικά* επίσης I. 5, 188 η γωνία, η ευθεία, ο κύκλος αποκαλούνται είδη *μορφής/σχήματος* . Ο Αριστοτέλης χωρίς αμφιβολία θα θεωρούσε ότι η *κάμψη/απόκλιση* (κεκλάσθαι) ανήκει στην ίδια κατηγορία με την ευθύτητα και την καμπυλότητα. Σε όλες τις περιπτώσεις ο Εύδημος θεώρησε ότι η γωνία προέρχεται από την κάμψη και την απόκλιση (κλάσις) γραμμών. Η κάμψη, συμπεραίνει, είναι ποιόν εάν και η ευθύτητα είναι ποιόν, και ό,τι προέρχεται από ποιόν είναι και το ίδιο ποιόν. Ωστόσο υπήρξαν ενστάσεις και σε αυτή την άποψη. Εάν η γωνία είναι ποιότης όπως η ζέστη ή το κρύο, πώς γίνεται να διχοτομείται; Η γωνία μπορεί να διαιρεθεί. Και, εάν η διαιρετότητα είναι απαραίτητη ιδιότητα των πραγμάτων που θεωρούνται *ποσόν* και όχι ποιόν, μία γωνία δεν μπορεί να θεωρηθεί ποιόν. Επιπλέον, *το περισσότερο* και *το λιγότερο* αποτελούν τις ειδικές ιδιότητες της ποιότητας, όχι το ίσο και το άνισο. Για το λόγο αυτό εάν η γωνία ήταν ποιόν, θα έπρεπε να αναφερόμαστε στη γωνία όχι ως μικρότερη ή μεγαλύτερη, αλλά ως περισσότερο ή λιγότερο γωνία και θα έπρεπε να λέμε ότι δύο γωνίες είναι *ανόμοιες* και όχι άνισες. Πράγματι ξέρουμε από τα σχόλια του Σιμπλίκιου, 538, 21 πάνω στο De Caelo του Αριστοτέλη ότι εκείνοι που κατέτασσαν τη γωνία στην κατηγορία ποιόν όντως χρησιμοποιούσαν τον όρο *όμοιες* γωνίες. Ο ίδιος ο Αριστοτέλης χρησιμοποιεί τον όρο όμοιες γωνίες με αυτή την έννοια στο *De Caelo* 296β 20, 311β 34.

3. Ο Συριανός θεωρεί ότι ο Ευκλείδης και όλοι εκείνοι που αποκαλούσαν τη γωνία κλίση την κατατάσσουν στην κατηγορία *σχέση* (*προς τι*). Ακόμη είναι σίγουρο πως ο Ευκλείδης θεωρεί τις γωνίες μεγέθη. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα και στην

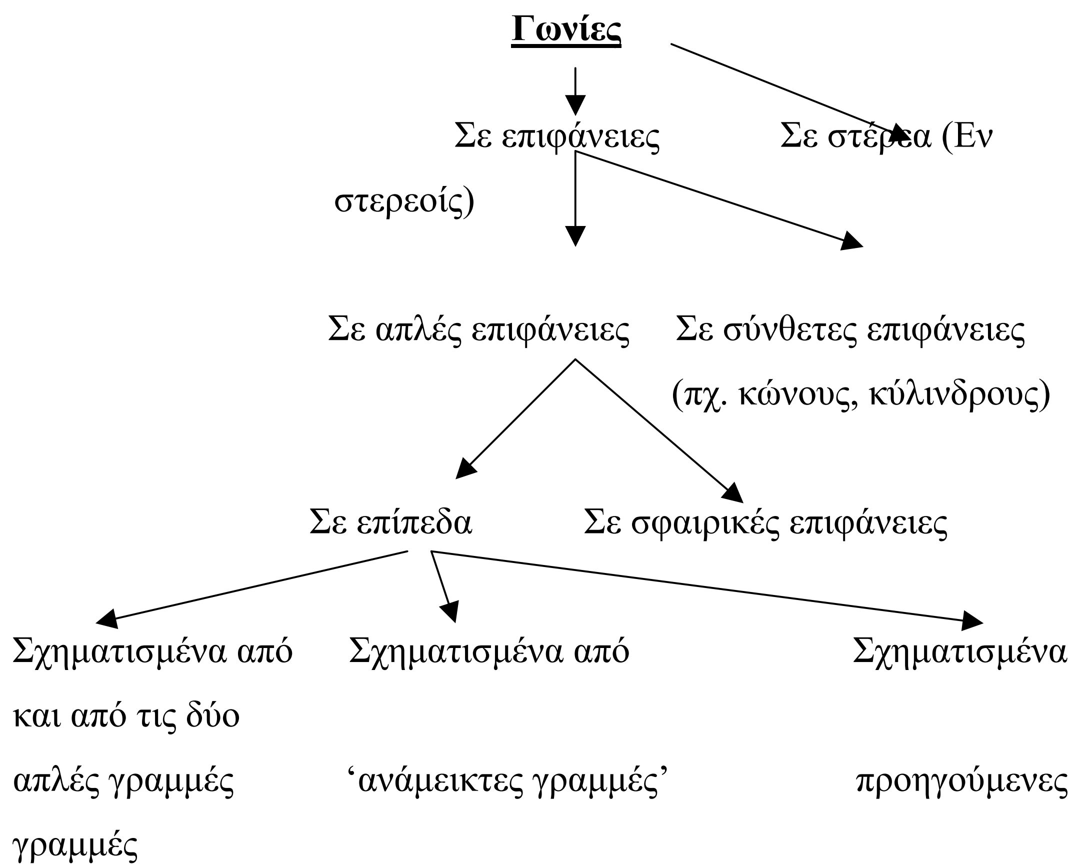
περίπτωση από τις προηγούμενες προτάσεις που αναφέρονται ειδικά στις γωνίες πχ Ι. 9, 13 και επίσης (μολονότι με διαφορετικό τρόπο) από τον τρόπο που περιγράφει τη γωνία στον επόμενο ορισμό και πάντα ως *περιεχόμενη* στις δύο γραμμές που τη σχηματίζουν. (Συμεών, Ευκλείδης, σελ.28)

Ο Πρόκλος (σε αυτή την περίπτωση ο Συριανός) προσθέτει ότι η αλήθεια βρίσκεται κάπου ανάμεσα στις τρεις αυτές απόψεις. Η γωνία ουσιαστικά ανήκει/ συμμετέχει και στις τρεις κατηγορίες. Χρειάζεται την *ποσότητα* που βρίσκεται στα μεγέθη, επομένως επιδέχεται την ισότητα, την ανισότητα και τα όμοια. Χρειάζεται την ποιότητα που της δίνεται από το σχήμα της και τελευταία την σχέση που υπάρχει στις γραμμές ή τα επίπεδα που την οριοθετούν.

Η αρχαία κατηγοριοποίηση των «γωνιών»

Μια λεπτομερής κατηγοριοποίηση των γωνιών σύμφωνα με τον Πρόκλο μπορεί σίγουρα να αποδοθεί στον Γέμινο (Geminus). Για να την δείξουμε σε διάγραμμα είναι απαραίτητο να δώσουμε ένα παράδειγμα ανάγνωσης των όρων. Όλες οι κατηγορίες αναφέρονται σε είδη γωνιών, το “γραμμή-περιφέρεια” αναφέρεται σε γωνία που σχηματίζεται από μία ευθεία γραμμή και ένα τόξο κύκλου, το “γραμμή-κυρτό” αναφέρεται σε γωνία που σχηματίζεται από ευθεία γραμμή και από κυκλικό τόξο με κυρτότητα προς τα έξω. Με τον ίδιο τρόπο ‘διαβάζουμε’ και τους υπόλοιπους όρους.

Ακολουθεί το σχεδιάγραμμα στην επόμενη σελίδα.

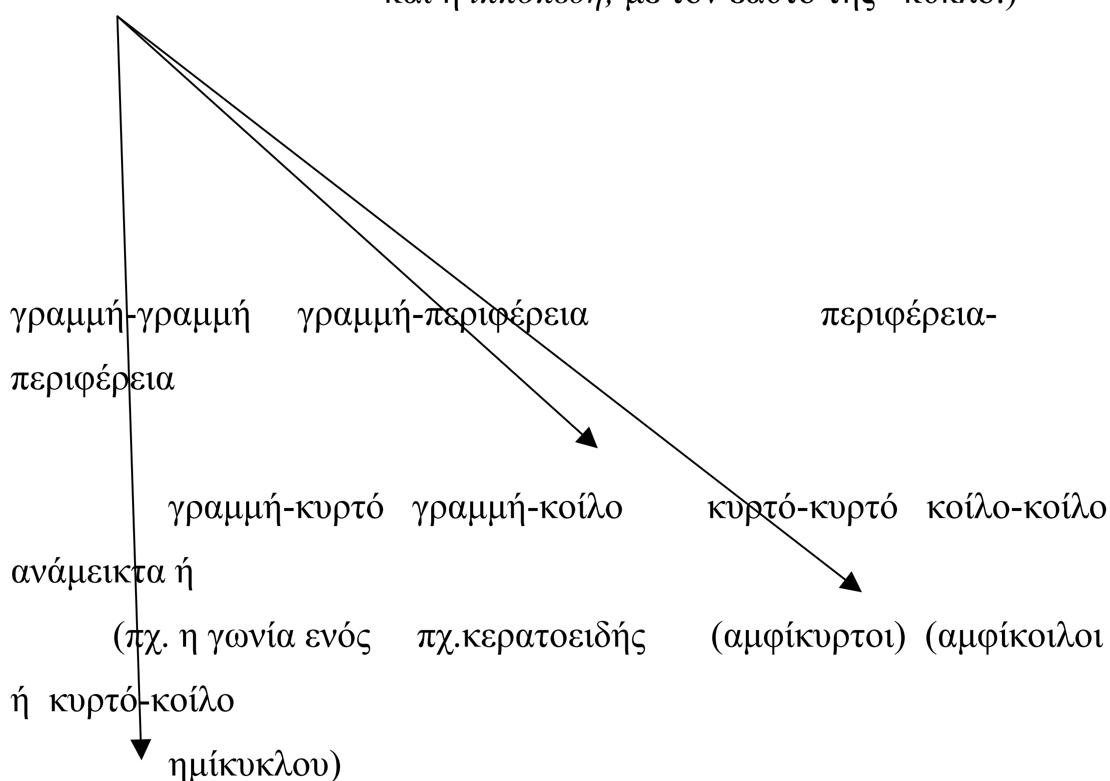

Γωνίες
Σε επιφάνειες
Σε στέρεα (Εν στερεοίς)
Σε απλές επιφάνειες
Σε σύνθετες επιφάνειες (πχ. κώνους, κύλινδρους)
Σε επίπεδα
Σε σφαιρικές επιφάνειες
Σχηματισμένα από απλές γραμμές
Σχηματισμένα από 'ανάμεικτες γραμμές'
Σχηματισμένα και από τις δύο προηγούμενες γραμμές

πχ. η γωνία που σχηματίζεται (πχ. η γωνία που σχηματίζεται

από μία καμπύλη από μία έλλειψη και τον άξονά

όπως η *κισσοειδής* της ή από μία έλλειψη και ένα

και η *ιπποπέδη,* με τον εαυτό της κύκλο.)



γραμμή-γραμμή γραμμή-περιφέρεια περιφέρεια-περιφέρεια

γραμμή-κυρτό γραμμή-κοίλο κυρτό-κυρτό κοίλο-κοίλο ανάμεικτα ή

(πχ. η γωνία ενός πχ.κερατοειδής (αμφίκυρτοι) (αμφίκοιλοι ή κυρτό-κοίλο

ημίκυκλου)

ξυστροειδείς) (αυτά σε

σχήμα μισο-

φέγγαρου).

<u>Ορισμοί της ταξινομημένης γωνίας</u>

Όπως για το σημείο, την ευθεία και το επίπεδο έτσι και για τη γωνία ο Schotten δίνει μία αξιόλογη περίληψη, ταξινόμηση και κριτική των διαφορετικών μοντέρνων απόψεων μέχρι τούδε (*Inhalt und Method des planimetrischen Untrerrichts*, II., 1893, σελ. 94-183). Όσο για τις επόμενες εξελίξεις που παρουσιάζονται από τον Veronese γίνεται αναφορά στο τρίτο κεφάλαιο (από τον Amaldi) του Questioni riguardanti le matematiche elementari, I. (Bologna, 1912).

Με μία ή δύο εξαιρέσει, αναφέρει ο Schotten, οι ορισμοί της γωνίας μπορούν να χωριστούν σε τρεις ομάδες που γενοκότερα αντιπροσωπεύουν τα εξής:

1. Η γωνία είναι η διαφορά κατεύθυνσης μεταξύ δύο ευθείων γραμμών. (Με αυτή την ομάδα μπορεί να συγκριθεί ο ορισμός του Ευκλείδη σύμφωνα με τον οποίο η γωνία είναι μία απόκλιση)
2. Η γωνία είναι η ποσότητα ή το ποσόν (ή το μέτρο) μιας περιστροφής που γίνεται φέρνοντας/ για να φέρει μία από τις πλευρές της, από τη θέση της σε αυτήν της άλλης πλευράς, χωρίς να ξεφεύγει από το επίπεδο που περιέχει και τις δύο.
3. Η γωνία είναι το μέρος ενός επιπέδου που περιέχεται ανάμεσα σε δύο ευθείες γραμμές μέσα στο επίπεδο οι οποίες συναντιούνται σε ένα σημείο (ή δύο ακτίνων που ξεκινούν από το ίδιο σημείο).

Είναι άξιο προσοχής ωστόσο ότι σχεδόν όλα τα εγχειρίδια, που δίνουν ορισμούς διαφορετικούς από αυτούς των ομάδων, προσθέτουν σε αυτούς κάτι επισημαίνοντας τη σχέση μεταξύ γωνίας και περιστροφής: μία εντυπωσιακή υπόδειξη ότι η ουσιαστική/κύρια φύση της γωνίας είναι στενά συνδεδεμένη με την περιστροφή και ότι ένας καλός ορισμός πρέπει να υπολογίζει αυτή τη σύνδεση.

Οι ορισμοί της πρώτης ομάδας είναι ομολογουμένως ταυτολογικοί ή, *κυκλοτερείς*, λαμβανομένου υπ’όψιν ότι προϋποθέτουν κάποια ιδέα για τη γωνία. Η κατεύθυνση (ως ανάμεσα σε δύο δεδομένα σημεία) μπορεί χωρίς αμφιβολία να θεωρηθεί πρωταρχική ιδέα και μπορεί να οριστεί ως “η άμεση σχέση δύο σημείων τα οποία μας επιτρέπει να συνειδητοποιήσουμε η ακτίνα”(Schotten). Όμως “μία κατεύθυνση δεν είναι κανένα τεράστιο μέγεθος οπότε δύο κατευθύνσεις δεν μπορούν να έχουν καμία ποσοτική διαφορά” (Burklen). Ούτε η κατεύθυνση επιδέχεται διαφορές σαν αυτές των ποιοτήτων, πχ. χρώματα. Η κατεύθυνση είναι μία μοναδική ενότις: δεν μπορεί να υπάρξουν διαφορετικά *είδη* ή *βαθμοί* κατεύθυνσης. Εάν αναφερόμαστε σε μία ‘διαφορετική κατεύθυνση’ χρησιμοποιούμε τη λέξη διφορούμενα, αυτό που εννοούμε είναι απλώς μια ‘άλλη’ κατεύθυνση. Γεγονός είναι ότι οι ορισμοί που ορίζουν τη γωνία ως διαφορά κατεύθυνσης υποσυνείδητα επικαλούνται κάτι έξω από την έννοια της κατεύθυνσης συνολικά, κάποια έννοια ανάλογη με αυτή της ίδιας της γωνίας.

Ορισμός 13

Όρος εστίν, ο τινός έστι πέρας.

Όριο είναι αυτό το οποίο αποτελεί άκρο κάποιου πράγματος.

Ο Αριστοτέλης επίσης χρησιμοποιεί τις λέξεις *όρος* και *πέρας* ως συνώνυμες. De gen. Animal.II. 6, 745, & 6, 9 όπου στην έκφραση ‘όριο/σύνορο του μεγέθους’ χρησιμοποιούνται και οι δύο λέξεις.

Ο Πρόκλος (σελ. 136, 9) σημειώνει ότι η λέξη όριο φτάνει στις ρίζες της γεωμετρίας, η οποία προέκυψε από με τη μέτρηση περιοχών του εδάφους και την οριοθέτησή τους.

Ορισμός 14

Σχήμα εστί το υπό τινός ή τινών όρων περιεχόμενον.

Σχήμα είναι αυτό το οποίο περιέχεται σε οποιοδήποτε όριο ή όρια/σύνορα.

Ο Πλάτωνας στο Μενωνα παρατηρεί ότι η στρογγυλότις ή το στρογγυλό αποτελεί 'σχήμα', όπως επίσης η ευθεία και πολλά άλλα πράγματα. Έπειτα εξετάζει τι κοινό έχουν όλα αυτά και χάρις στην παρατήρησή του αναφερόμαστε σε αυτά με τον όρο 'σχήμα'. Η απάντησή του είναι η εξής (76Α): «αναφερόμενος/παραπέμποντας σε όλα τα σχήματα λέω ότι σχήμα είναι αυτό μέσα στο οποίο έχει τα άκρα του ένα στερεό (τούτο, εις ο το στερεόν περαίνει) ή εν συντομία *σχήμα είναι ένα άκρο ενός στερεού*. Η πρώτη παρατήρηση είναι όμοια με αυτή του Αριστοτέλη στα *Φυσικά* Ι. 5, 188, &25, όπου η γωνία, η ευθεία και ο κύκλος αναφέρονται ως είδη σχήματος. Στις *Κατηγορίες* 8, 10 & 11, το ΄σχήμα' συγκαταλέγεται με την ευθύτητα και την καμπυλότητα στην κατηγορία της ποιότητας. Ωστόσο εδώ το ΄σχήμα' φαίνεται να σημαίνει μάλλον *μορφή* παρά σχήμα με την έννοια που του δίνουμε σήμερα. Πλησιάζοντας τη σημερινή έννοια του σχήματος, ο Αριστοτέλης δέχεται ότι το σχήμα είναι ένα 'είδος μεγέθους'(De Anima III. I, 425 & 18), και διαχωρίζει τα *επίπεδα σχήματα* σε δύο είδη, χρησιμοποιώντας γλώσσα όχι πολύ διαφορετική/όμοια απ'του Ευκλείδη, σε αυτά που περιέχονται σε

ευθείες και κυκλικές γραμμές: ‘κάθε επίπεδο σχήμα είναι είτε ευθύγραμμο ή σχηματισμένο από κυκλικές γραμμές (περιφερόγραμμον), το ευθύγραμμο σχήμα περιέχεται σε πολλές γραμμές, το κυκλικό σε μία.’(De caelo II. 4, 286b 13). Επισημαίνει ότι το επίπεδο δεν είναι σχήμα ούτε το σχήμα επίπεδο, όμως ένα επίπεδο σχήμα αποτελεί μία έννοια και είναι είδος της κατηγορίας σχήμα/ανήκει στο είδος του σχήματος (Anal. Post. Ii. 3, 90 b 37). Ο Αριστοτέλης δεν επιχειρεί γενικά να ορίσει το σχήμα, μάλιστα υποστηρίζει ότι θα ήταν άσκοπο/ανώφελο: ‘Από αυτό είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχει ένας ορισμός για την ψυχή με τον ίδιο τρόπο που υπάρχει ένας ορισμός για το σχήμα. Γιατί στη μία περίπτωση δεν υπάρχει κανένα σχήμα εκτός από το τρίγωνο, το τετράπλευρο, και ούτω καθεξής, ούτε υπάρχει ψυχή άλλη πέραν αυτών που προαναφέρθησαν. Θα μπορούσε να δημιουργηθεί ένας ορισμός ο οποίος θα έπρεπε να αφορά σε όλα τα σχήματα αλλά όχι ειδικά σε κάποιο συγκεκριμένο σχήμα, και ομοίως με τα είδη της ψυχής που αναφέρονται.[Αλλά ένας τόσο γενικός ορισμός δεν θα εξυπηρετούσε κανένα σκοπό.] Ως εκ τούτου είναι παράλογο εδώ όπως και αλλού να αναζητούμε έναν γενικό ορισμό ο οποίος δεν θα αποτελεί κανονικά έναν ορισμό κάποιου υπαρκτού πράγματος και δε θα μπορεί να εφαρμοστεί σε ένα συγκεκριμένο ανάγωγο (που δεν επιδέχεται απλοποιήση) είδος μπροστά μας, στην εγκατάλειψη του ορισμού πράγμα που εφαρμόζεται εύκολα/πολύ εφαρμόσιμο.’

Συγκρίνοντας τον ορισμό του Ευκλείδη με τα παραπάνω, παρατηρούμε ότι με την εισαγωγή του ορίου (όρος) αυτός αυτόματα εξαιρεί την ευθεία την οποία ο Αριστοτέλης χαρακτήρισε ως σχήμα. Επίσης χωρίς αμφιβολία μπορούμε να πούμε ότι εξαίρεσε και τη γωνία κρίνοντας (1)από τη δήλωση του Ήρωνα ότι ‘ούτε μία ούτε δύο γραμμές μπορούν να ολοκληρώσουν ένα σχήμα’ (2) από τον εναλλακτικό ορισμό της ευθείας γραμμής ως ‘αυτή η οποία δεν μπορεί με αλλή γραμμή του

ίδιου είδους να δώσει σχήμα' (3) από τον διαχωρισμό που έκανε ο Geminus ανάμεσα στη γραμμή που *δίνει σχήμα* (*σχηματοποιούσα*) και τη γραμμή που *προεκτείνεται επ'άπειρον* (*επ'άπειρον εκβαλλόμενη*), του οποίου μεταγενέστερος όρος περιλαμβάνει μία υπερβολή και μία παραβολή. Αντί να ονομάσει σχήμα ένα *άκρο,* όπως έκανε ο Πλάτωνας με την έκφραση 'άκρο ενός στερεού', ο Ευκλείδης περιγράφει ως σχήμα *αυτό το οποίο έχει ένα όριο ή όρια*. Και τελευταία, παρά την ένσταση του Αριστοτέλη, όντως επιχειρεί έναν γενικό ορισμό που να καλύπτει όλα τα είδη του σχήματος, στέρεα και επίπεδα. Για το λόγο αυτό φαίνεται ξεκάθαρα πως ο ορισμός του Ευκλείδη ανήκει αποκλειστικά σε αυτόν.

Μία άλλη άποψη για το σχήμα, που θυμίζει αυτή του Πλάτωνα στο Meno 76A, αποδίδεται από τον Πρόκλο στον Ποσειδώνιο. Ο τελευταίος θεωρούσε το σχήμα *πέρας συγκλείον*, "διαχωρίζοντας την έννοια του σχήματος από αυτή της ποσότητας (ή του μεγέθους) και αποδίδοντας της την αιτία του *ωρίσθαι*, του *πεπεράσθαι* και της *περιοχής*. … Έτσι φαίνεται ο Ποσειδώνιος να έχει υπ'όψιν του το όριο μόνο τοποθετημένο γύρω από έξω, ενώ ο Ευκλείδης εννοεί όλο το περιεχόμενο, έτσι ώστε ο Ευκλείδης να μιλά για κύκλο ως σχήμα αναφορικά με ολόκληρο το επίπεδο του (επιφάνεια) και την περιοχή εκτός, ενώ ο Ποσειδώνιος (να μιλά για κύκλο ως σχήμα) αναφορικά με την περιφέρειά του….ο Ποσειδώνιος ήθελε να εξηγήσει την έννοια του σχήματος ως ένα *πεπερασμένο* και *συγκλείον* μέγεθος.

Ο Πρόκλος παρατηρεί ότι μια λογική και εκλεπτυσμένη κριτική ίσως να επέκρινε τον ορισμό του Ευκλείδη γιατί καθορίζει το είδος από τα επιμέρους είδη, αφού αυτό που περικλείεται από ένα όριο και αυτό που περικλείεται από πολλά είναι εξίσου είδη σχημάτων. Η καλύτερη απάντηση βρίσκεται στην παράγραφο του Αριστοτέλη (De Anima) που παρατίθεται άνωθεν.

Ορισμοί 15, 16

15. Κύκλος εστί σχήμα επίπεδον υπό μιας γραμμής περιεχόμενον [η καλείται περιφέρεια], προς ην αφ'ενός σημείου των εντός του σχήματος κειμένων πάσαι αι προσπίπτουσαι ευθείαι [προς την του κύκλου περιφέρεια] ίσαι αλλήλαις εισίν.

16. Κέντρον δε του κύκλου το σημείον καλείται.

15. Κύκλος είναι ένα επίπεδο σχήμα που περιέχεται σε μια γραμμή τέτοια που όλες οι ευθείες γραμμές που προσπίπτουν πάνω της ξεκινώντας από ένα από τα σημεία που βρίσκονται εντός του κύκλου, είναι ίσες μεταξύ τους.

16. Και το σημείο αυτό καλείται κέντρο του κύκλου.

Οι απόψεις του Πρόκλου επί των ορισμών του Ευκλείδη

Εκτός από τις επισυνάψεις των σχολίων του Πρόκλου στο προηγούμενο μέρος των σχολίων του Heath, ενδιαφέρον έχουν κι άλλες απόψεις του Πρόκλου. Συγκεκριμένα:

Πάνω στον ορισμό 1

Φρονεί , ότι είναι σε όλους προφανές, ότι ο Ευκλείδης, κατά τους ορισμούς του, προχώρησε επαγωγικά, από το συνθετότερο στο απλούστερο, και συγκεκριμένα , από το τριδιάστατο σχήμα στην επιφάνεια η οποία είναι το πέρας του, μετά από την επιφάνεια , στο πέρας της οποίας είναι η γραμμή, και από την γραμμή στο σημείο το οποίο είναι ανεξάρτητο από κάθε διάσταση. Στην συνέχεια αφού κάνει ορισμένα μεταφυσικής φύσεως σχόλια πάνω στην έννοια των περάτων, αποφαίνεται, ότι η μονάδα μεταξύ των αύλων μορφών, είναι η πλέον τέλεια από την πολλαπλότητα, το αδιαίρετο με ό,τι προηγείται –με οποιοδήποτε τρόπο- από αυτό και ό,τι φράσσει , είναι πιο τέλειο από αυτό που παίρνει το πέρας του., από κάτι άλλο εκτός από τον εαυτό του. Βεβαίως , αυτό μοιάζει αρκετά δυσνόητο, αλλά στην ουσία ο Πρόκλος αναφέρεται στο ότι τα «δομικά στοιχεία» των μαθηματικών οντοτήτων είναι πιο τέλεια από τα «παράγωγά τους»

Πάρα κάτω γίνεται πιο σαφής, λέγοντας ότι «αυτά τα απλά υπάρχουν για τα σύνθετα» λέει ακόμα, ότι «οι έννοιες των υπάρχουν περάτων , υπάρχουν κι υφίστανται στους ίδιους τους εαυτούς τους και όχι στα ίδια τα περατούμενα» Κι αυτό αποτελεί μια δυσνόητη απόφανση του Πρόκλου, αλλά –σύμφωνα και με σχολιαστές του έργου του (Morrow) αυτό πρέπει να το ερμηνεύσουμε με το ότι λ.χ. το σημείο , όταν ενσωματώνεται στις γραμμές που περιορίζει, χάνει τον αδιαίρετο χαρακτήρα του και συμμετέχει στην διαιρετότητα των περιορισμένων σωμάτων.

Ενδιαφέρον έχει και η άποψή του για το ότι το σημείο παρ΄ ότι δεν έχει μέρη, και όσο κι αν η ύπαρξή του καθορίζεται από το πέρας, εν τούτοις , περιέχει κάτι από την δυναμική του απείρου. Διότι γεννά όλα τα διαστήματα και η πρόοδος όλων των διαστημάτων , δεν εξαντλεί την δυναμική του. Μετέχοντας στην φύση του απείρου το σημείο , είναι παρόν στα σώματα (σημειοσύνολα) άπειρες φορές.

Αναφέρει ακόμα, ότι τα σώματα, ως διαφορετικά έχουν διαφορετικά πέρατα. Ωστόσο, το σημείο, είναι πέρας πάντων .

Στην συνέχεια κάνει μια αναδρομή στους πόλους του κόσμου σε σχέση με τις απόψεις του Πλάτωνα .

Παραδέχεται ότι η έννοια του σημείου μπορεί να είναι ατελής σύμφωνα με κάποια άποψη, αλλά για την παρούσα επιστήμη (Γεωμετρία) τέλειος. Λέει, ότι και ο Γιατρός και ο φυσικός ξεκινούν με κάποιες αρχές. Ο Γιατρός λέει ότι στοιχεία των σωμάτων είναι το πύρ και το ύδωρ, και συνεχίζει ο φυσικός, από εκεί που σταμάτησε ο γιατρός αναλύοντας σε απλούστερα, και όλοι έχουν δίκιο σε σχέση με την επιστήμη τους. Έτσι λοιπόν και για την γεωμετρία , δεν θα πρέπει να πούμε ότι έχει ατέλεια ο ορισμός του σημείου, διότι λέει σαφώς ότι αυτό που είναι χωρίς μέρη, είναι το σημείο και τίποτε άλλο εκτός αυτού. Και βέβαια, με αυτόν τον τρόπο θα πρέπει να εννοήσουμε τον ορισμό του Ευκλείδη.

Στην συνέχεια κάνει μια ενδιαφέρουσα αναφορά σε σχέση με τον Παρμενίδη , αποδίδοντας σε αυτόν την ρήση , ότι οι αρνητικοί ορισμοί, είναι οι πλέον κατάλληλοι για τις πρώτες αρχές. (έχει σχολιασθεί κι απ΄ τον Heath) .

Αναφερόμενος στους Πυθαγορείους για το ότι σημείο είναι «μονάς προσλαβούσα θέση» στην προσπάθειά του να εκθέσει το τι εννοούσαν αυτοί λέει , ότι οι αριθμοί είναι καθαρότεροι και πιο άϋλοι από τα μεγέθη και ότι η αρχή τους (η μονάδα) είναι απλούστερη απ΄ αυτούς. Αλλά όταν λένε ότι η μονάδα έχει θέση[27], νομίζω ότι δηλώνουν ότι η μονάδα έχει την ύπαρξή της και την θέση της στην σκέψη.

Και καταλήγει:

Είναι λοιπόν η μονάδα χωρίς θέση, διότι είναι άϋλη και έξω από κάθε διάστημα και τόπο.

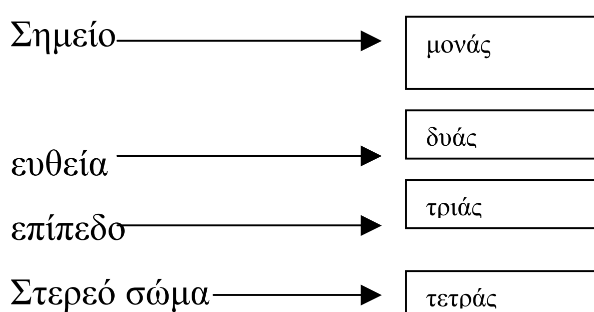
Ορισμός 2

Διευκρινίζει , ότι όταν ο Ευκλείδης λέει ότι η γραμμή είναι «μήκος χωρίς πλάτος,»εννοείται και το «χωρίς βάθος»

---

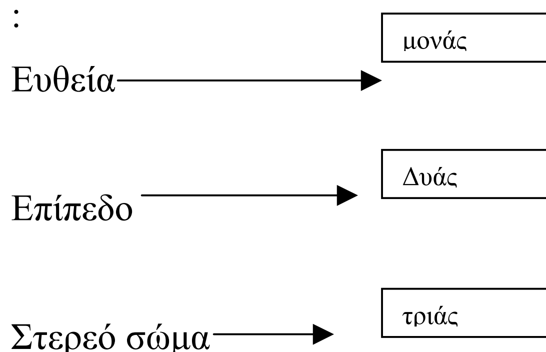
[27] Ο Morrow λέει «την αντίθετη πρόταση «θέσιν μη έχουσα» σε αντίθεση με τον Friedlein με το επιχείρημα ότι μόνο έτσι έχει νόημα η αντιθετική πρόταση που εμφανίζεται εδώ «η μεν μονάς» και «το δε σημείο» πρέπει όμως να δεχθούμε-κατά την γνώμη του γράφοντος- ότι εννοιολογικά στέκει το «θέσιν έχουσα»

Διαπραγματεύεται κατόπιν την έννοια της ρύσεως σημείου (ξεχωριστή εργασία γι αυτό)
Στην συνέχεια κάνει μια ενδιαφέρουσα σύγκριση των αρχών σε σχέση με τους Πυθαγορείους, αλλά και τον Αριστοτέλη που θεωρούν τα γεωμετρικά αντικείμενα είτε από άποψη διαστάσεων είτε από άποψη τάξεως αρχών.
Σχηματικά, ασχολείται με τα παρακάτω:



Πράγματι , τα παραπάνω σχετίζονται και με την Τετρακτύν Των Πυθαγορείων (1+2+3+4=10)

Το άλλο σχήμα έχει να κάνει με τις διαστάσεις των σωμάτων και είναι :



Λέει χαρακτηριστικά, ότι η επιφάνεια έχει τάξη τρία σε σχέση με το σημείο και την γραμμή, αλλά δύο σε σχέση με το στερεό. Έτσι και το

σώμα σε σχέση με το σημείο είναι τετραδικό, σε σχέση με την γραμμή τριαδικό. Έτσι , σύμφωνα με τους Πυθαγόρειους, το σημείο έχει διττή φύση, εφ΄ όσον υπάρχει είτε μόνο του , είτε σε γραμμή. Και ως πέρας μόνο, και ένα, μη έχοντας ούτε ολότητα, ούτε μέρη, μιμείται την κορυφή των όντων και έτσι ταξινομείται ως ανάλογο της μονάδας.
Η γραμμή είναι το πρώτο πράγμα που έχει μέρη και που είναι μια ολότητα. Είναι δε και μοναδική και ως μονοδιάστατη, αλλά και δυαδική λόγω της προόδου της. Ως άπειρη συμμετέχει στην αόριστη δυάδα και αν είναι πεπερασμένη (ευθ. τμήμα) απαιτεί δύο πέρατα, από πού και προς τα πού.[28]
Αφού κάνει και μια μεταφυσική θεώρηση, καταλήγει στο ότι μπορούμε να έχουμε μια οπτική αντίληψη της γραμμής , αν παρατηρήσουμε τον χωρισμό σκιάς και φωτός , είτε στην Γη είτε στην σελήνη. Το ενδιάμεσο φωτός –σκιάς είναι αδιάστατο κατά πλάτος.[29]

<u>Ορισμός 3</u>

Σχολιάζει ο Πρόκλος, πως κάθε σύνθετο παίρνει το πέρας από το απλό και κάθε διαιρετό από το αδιαίρετο.
Ο Ευκλείδης όταν λέει ότι η γραμμή περατούται από σημεία, μας φανερώνει , ότι αυτή καθ΄ εαυτή η γραμμή είναι απεριόριστη , σαν να μην έχει πέρας, εξ αιτίας της προεκτάσεως.

---

[28] Εδώ υπάρχει μια διχογνωμία σε σχέση με το αρχαίο κείμενο. Ο Friedlein λέει «προς τον επ΄αυτής» και άλλοι «πρώτον επ΄αυτής» Εδώ υιοθετήθηκε η πρώτη άποψη.
[29] Με σύγχρονη θεώρηση ο Πρόκλος βρήκε ένα καλό ανάλογο και τίποτα περισσότερο, αφού υπάρχει παρασκιά , σκιά , τα σώματα που ορίζουν την σκιά είναι φυσικά και άρα ατελή κτλ.

Λέει ακόμα ότι η γραμμή είναι και άπειρη και πεπερασμένη υπό την εξής έννοια: κατά όσον αφορά την δυνατότητα προέκτασής της , άπειρη, κατά δε την συμμετοχή της στην αιτία της που είναι όμοια με πέρας (εννοεί το σημείο) είναι πεπερασμένη.
Στην συνέχεια διαπραγματεύεται την υπόσταση της γραμμής ως ευθ. τμήματος, ημιευθείας και ευθείας ., λέγοντας χαρακτηριστικά, ότι σύμφωνα με τον Ευκλείδη, η γραμμή έχει τρεις έννοιες.
(Οι υπόλοιπη θεώρηση υπάρχει σχολιασμένη στο τμήμα της εργασίας πάνω στον Heath)

Ορισμός 4

Ευθεία γραμμή είναι αυτή που κείται εξ ίσου προς τα σημεία της.
Αναφέρει την άποψη του Πλάτωνα που λέει ότι τα δύο πρωταρχικά είδη γραμμών είναι η ευθεία και η περιφέρεια του κύκλου και ότι τα άλλα είδη των γραμμών προέρχονται από ανάμειξη αυτών των δύο. Τόσο αυτών που ονομάζονται ελικοειδείς και βρίσκονται σε επίπεδα, τόσο κι αυτών που ορίζονται γύρω από στερεά , είτε κι αποτομές στερεών.
Σύμφωνα με τον Πλάτωνα, το σημείο μοιάζει να έχει την υπόσταση της μονάδας. . διότι και η μονάδα δεν έχει μέρη, (όπως μας λέει στον Παρμενίδη) . Υπάρχουν τρεις υποστάσεις : Το πέρας, το άπειρο και το μεικτό. Μέσω αυτών δημιουργούνται τα είδη των γραμμών και τα είδη των γωνιών , αλλά και τα είδη των σχημάτων. Και αντίστοιχα με το πέρας είναι : Στα μεν επίπεδα η περιφέρεια του κύκλου, η γωνία που ορίζεται από καμπύλες, και ο κύκλος. Στα δε στερεά η σφαίρα. Στο άπειρο ανταποκρίνεται η ευθεία και στις τρεις ομάδες , επειδή βρέθηκε σε όλα αυτά . υπάρχουν επίσης μεικτές γραμμές, όπως οι

έλικες και μεικτές γωνίες, όπως του ημικυκλίου, και η κερατοειδής και μεικτά σχήματα , όπως τα τμήματα και οι αψίδες .

Αναφέρει ακόμα ο Πρόκλος , ότι και η άποψη του Αριστοτέλη είναι ίδια με του Πλάτωνα , διότι λέει ότι κάθε είδος γραμμής είναι ή ευθεία ή περιφερής ή μεικτή από αυτά. Και για τον λόγο αυτό μάλιστα υπάρχουν και τρία είδη κινήσεων. Κίνηση σε ευθεία , κίνηση κυκλική και κίνηση μεικτή.

Στην συνέχεια αναφέρεται στην κυλινδρική έλικα Κι στο πως αυτή παράγεται από την κίνηση την μεικτή που κάνει σημείο κινούμενο ευθύγραμμα κατά μήκος της κυλινδρικής επιφάνειας , ενώ ο κύλινδρος στρέφεται με ομαλή ταχύτητα. Μας δίνει και την πληροφορία , ότι ο Απολλώνιος είναι αυτός που χαρακτηρίζει την καμπύλη αυτή ομοιομερή , αφού όπως αποδεικνύει σε (χαμένο) έργο του είναι αυτή η καμπύλη ή μόνη που έχει αυτό το χαρακτηριστικό (μη επίπεδη)

Στην συνέχεια είναι αρκετά ενδιαφέρον που ο Πρόκλος, παρουσιάζει τον τρόπο γένεσης κάποιων γραμμών με σκοπό να τις κατατάξει, παρουσιάζοντας ουσιαστικά σύνθεση κινήσεων:

Λέει:

Φαντασθείτε ένα τετράγωνο και δύο κινήσεις, μία κατά μήκος και μία κατά πλάτος. Τότε θα προκύψει μια διαγώνια κίνηση, πάλι σε ευθεία.

Στην συνέχεια περιγράφει έναν αρκετά γνωστό και απλό γεωμετρικό τόπο . ευθύγραμμο τμήμα , σταθερού μήκους ολισθαίνει ανάμεσα στις πλευρές ορθής γωνίας. Ποίος ο τόπος του κέντρου της;

Αν κάποιος χρησιμοποιήσει την πρόταση ότι η διάμεσος επί την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι το μισό αυτής, τότε εύκολα δείχνουμε , ότι το μέσον διαγράφει κύκλο. Αυτό το παράδειγμα το χρησιμοποιεί ο Πρόκλος για να δείξει ότι ο κύκλος μπορεί να παραχθεί με αυτόν τον τρόπο (κίνηση ευθείας στα όρια της ορθής

γωνίας) και δεν θα πρέπει να κατατάξουμε τον κύκλο στις μεικτές γραμμές.

Ενδιαφέρον έχει και η αναφορά του Πρόκλου στον Πλάτωνα και στον ορισμό της ευθείς που δίνει:

Είναι αυτή, της οποίας το μέσον καλύπτει τα άκρα.[30] Εξηγεί μάλιστα τον πρωτότυπο αυτό ορισμό, λέγοντας, ότι αυτό είναι μια αναγκαία συνθήκη για τρία σημεία που βρίσκονται σε ευθεία .[31] Δεν είναι όμως αναγκαία για κάποια άλλη γραμμή (λ.χ. κύκλο) ή άλλη διάσταση. Για να γίνει σαφέστατος προσθέτει, ότι ο ήλιος βρίσκεται σε έκλειψη, όταν ο ήλιος βρίσκεται στην ίδια ευθεία με την Σελήνη και τον οφθαλμό μας.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η αναφορά του Πρόκλου στον Αρχιμήδη που όρισε την ευθεία ως την μικρότερη γραμμή που έχει με αυτή τα ίδια άκρα.

Στην συνέχεια αναφέρεται στις ταξινομήσεις κατά Γέμινο , στις οποίες έχουμε ήδη αναφερθεί.

Ορισμός 8

Επίπεδη γωνία είναι η κλίση δύο γραμμών μεταξύ τους στο επίπεδο , που τέμνονται και δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία

[30] Πλάτωνας «Παρμενίδης» (137[ε]) «Και μην ευθύ γε, ού αν το μέσον αμφοίν τοιν εσχάτοιν επίπροσθεν ή»

[31] Πρόκειται και για πρακτικό έλεγχο μιας γραμμής αν είναι ή όχι ευθεία : αν κοιτάξουμε πλάγια στο χαρτί και το ένα άκρο τείνει να εξαφανισθεί από το άλλο, η γραμμή είναι ευθεία. Αν μπορούσαμε να βάλουμε το μάτι μας ακριβώς στο ένα άκρο (σε ένα σύρμα λ.χ.) με αυτό το κριτήριο μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι ή όχι ευθύ , χωρίς κανόνα.

Ο Πρόκλος αναφέρεται στον χαρακτηρισμό των γωνιών ως ποιότητα ή ως ποσότητα. Επιχειρηματολογεί με το ότι αν ήταν μέγεθος, τότε αυτές θα είχαν λόγο . Και τότε θα φθάναμε στο σημείο μια κερατοειδής γωνία , να υπερέχει μιας ευθύγραμμης, πράγμα που δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει, διότι η κερατοειδής γωνία είναι η μικρότερη από όλες.

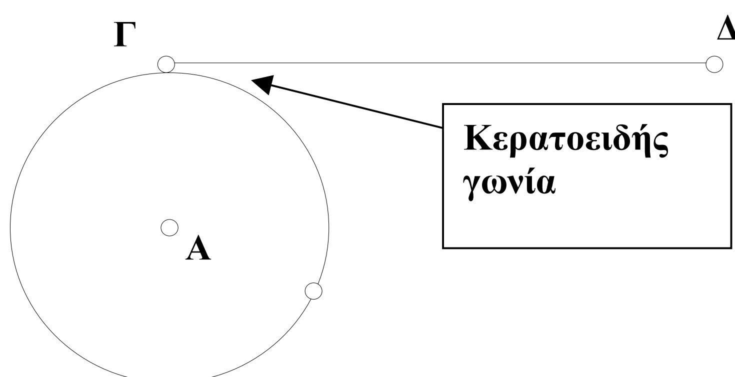
Επίσης αν η γωνία εκφράζει ποιότητα, όπως η ζέστη και το κρύο, τότε πως είναι δυνατόν να διαιρούνται σε δύο ίσα μέρη;
Στην συνέχεια αφού διαπραγματευθεί προβληματισμούς που απορρέουν από το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά είδη γωνιών και άρα δεν είναι συγκρίσιμες, καταλήγει;
Είναι απαραίτητο να ονομάσουμε την γωνία ή ποιότητα ή ποσότητα ή σχέση. . Τα μεν σχήματα είναι ποιότητες, οι λόγοι μεταξύ τους είναι σχέσεις . άρα απομένει η ταξινόμηση σε αυτά τα τρία γένη.
Ο Ευκλείδης λέει ότι η γωνία είναι κλίση.[32] Ενώ ο Απολλώνιος την ονομάζει σύγκλιση μιας επιφάνειας ή ενός στερεού προς ένα σημείο. Αναφέρει την άποψη του Απολλώνιου, ο οποίος έλεγε ότι μάλλον δεν είναι τομή επιφάνειας ή στερεού, αλλά μάλλον επιφάνεια που συστέλλεται στο δοσμένο σημείο της .[33]
Ο Εύδημος ο περιπατητικός έλεγε , ότι η γωνία είναι ποιότητα. Εξετάζοντας τον τρόπο με τον οποίο παράγεται η γωνία λέει ότι δεν είναι τίποτα άλλο παρά διαίρεση γραμμών. . αν μάλιστα η ευθύτητα συνιστά ποιότητα, το ίδιο θα είναι και η διαίρεση. Αλλά, αφού η γωνία έχει την προέλευσή της στην ποιότητα, τότε είναι ποιότητα.
Ο Πλούταρχος ο Αθηναίος[34] έλεγε ότι η γωνία είναι ποιότητα. Έλεγε ότι «η γωνία είναι το πρώτο διάστημα κάτω από το σημείο.» έλεγε

[32] Σύμφωνα με τον Heath αυτό συνιστά πρωτοπορία του Ευκλείδη.

μάλιστα πως το ίδιο υπεστήριζε και ο Απολλώνιος και βάσιζε τον ισχυρισμό του , στο ότι πρέπει να υπάρχει κάποιο πρώτο διάστημα κάτω από την κλάση που περιέχει γραμμές ή επιφάνειες.

Ο Κάρπος ο Αντιοχεύς, λέει ότι η γωνία είναι μια ποσότητα. Ειδικότερα, ότι είναι η απόσταση των γραμμών ή των επιφανειών που την περιέχουν. Αν και αυτή είναι απόσταση κατά μία έννοια . Η γωνία όμως δεν είναι γραμμή. Διότι κάθε τι που εκτείνεται κατά μία διάσταση δεν είναι γραμμή. Αυτό μάλιστα θα ήταν το πιο παράξενο από όλα, αν δηλαδή υπήρχε δηλαδή μέγεθος διαφορετικό από την γραμμή που να είχε μια μόνο διάσταση.

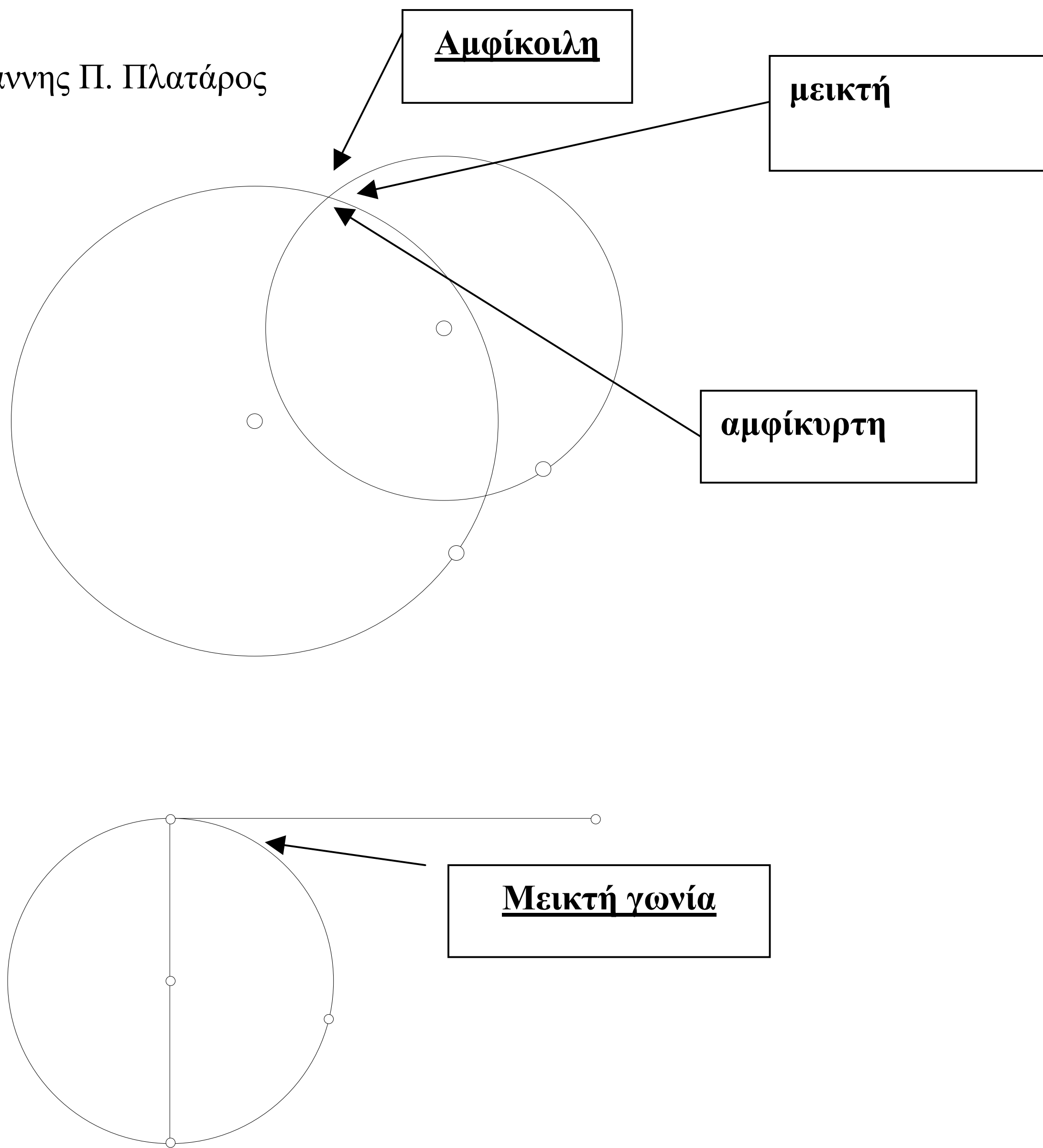
Στην συνέχεια παρουσιάζει κάποια είδη γωνιών όπως η ιπποπέδη, κισσοειδής και ξυστροειδής, κερατοειδής ,



---

[33] Εννοεί την κορυφή

[34] Δάσκαλος του Πρόκλου και διευθυντής της Ακαδημίας Πλάτωνος., σύμφωνα με υποσημείωση του G. Morrow



Ορισμός 13

Όριο είναι ό,τι είναι πέρας κάποιου.

Ο όρος όριο (σύνορο) δεν αναφέρεται σε κάθε μέγεθος, (αφού για παράδειγμα, το όριο της γραμμής είναι μάλλον πέρας.) αλλά σε επίπεδες επιφάνειες και στερεά. Ο Ευκλείδης ονομάζει όριο τη γραμμή που περικλείει μια περιοχή και είναι όριο με την έννοια αυτή, όχι όπως το σημείο που λέγεται ότι είναι όριο μιας γραμμής , αλλά ως αυτό που περιβάλει και περικλείει κάτι από αυτά που βρίσκονται γύρω του. Ο όρος αυτός είναι σύμφωνος με την αρχική Γεωμετρία

όπου μετρούσαν τα χωράφια , φρόντιζαν να διατηρούν τα όριά τους διακεκριμένα και από αυτή την δραστηριότητα επινόησαν αυτή την επιστήμη. Έτσι, όταν ο Ευκλείδης ονομάζει την εξωτερική περιβάλλουσα γραμμή όριο, την θεωρεί επίσης και πέρας των επιπέδων χωρίων. Γιατί οτιδήποτε που περιβάλλει, περιορίζεται από την περιβάλλουσα γραμμή. Για τον κύκλο για παράδειγμα, η περιφέρειά του είναι το όριο και το πέρας, αλλά η ίδια η επίπεδη επιφάνεια, είναι μια περιοχή.

Ορισμός 14

Σχήμα είναι αυτό που περιέχεται από κάποιο όριο ή από κάποια όρια.

Επειδή το σχήμα έχει πολλές έννοιες και διαιρείται σε διαφορετικά είδη, πρέπει να εξετάσουμε τις διαφορές αυτές ώστε να φθάσουμε στον ορισμό αυτό. Έτσι ξεκινά ο Πρόκλος και αφού αναφερθεί σε σχήματα υλικά , τέχνης σχήματα , και αφού περιηγηθεί σε φιλοσοφικές διασυνδέσεις με περί ψυχής λόγους σχήματα των θεώ αναφερόμενος στον Πλάτωνα, καταλήγει:
Ο γεωμέτρης (Ευκλείδης) ….το θεωρεί αμέσως ως ενωμένο με την ύλη και εκτεταμένο στην φαντασία και σωστά το ονομάζει περιορισμένο και με σύνορα. Γιατί οτιδήποτε έχει ύλη, είτε νοητή είτε αισθητή, έχει ένα σύνορο που προέρχεται από έξω από τον εαυτό του. Το σχήμα δεν είναι το ίδιο όριο, αλλά είναι περιορισμένο. Δεν είναι δικό του σύνορο, (διότι άλλο είναι το σύνορο, κι άλλο αυτό που έχει σύνορο) ούτε είναι μέσα σ΄αυτό, αλλά συμπεριλαμβάνεται σ΄αυτό. Αφού γεννιέται με ποσότητα και υπόκειται σ΄αυτή , η ποσότητα είναι

το υπόστρωμά του. Ο ορισμός αυτής της ποσότητας είναι το σχήμα. , δηλαδή η μορφή του και το σχήμα του.

Ο Ευκλείδης, ονόμασε σχήμα αυτό που σχηματίζεται, και το ένυλο πράγμα που συνυπάρχει με την ποσότητα το ορίζει ως περιεχόμενο.

Ο Ποσειδώνιος ορίζει το σχήμα ως το περιέχον όριο. Ξεχωρίζοντας την ιδέα του σχήματος από την ποσότητα και κάνοντάς το την αιτία του οριστικού (=που ορίζει , περιορίζει) Διότι ο παράγοντας που περικλείει είναι άλλος από αυτόν που περικλείεται.

Ο Ευκλείδης λέει ότι ο κύκλος είναι ένα σχήμα που ορίζεται από όλη την επίπεδή του επιφάνεια μαζί με την εξωτερική του περιφέρεια. Άλλος λέει ότι είναι ένα σχήμα λόγω της περιφέρειας. Η μία θεώρηση λέει ότι το σχηματιζόμενο είναι ένα με το υποκείμενό του κι ο άλλος λέει ότι το σχήμα είναι αυτό που περιορίζει κι εγκλείει ποσότητα.

Ορισμοί 15, 16 (Κύκλος και κέντρου κύκλου)

Αφού ενασχοληθεί ο Πρόκλος με φιλοσοφικές θεωρήσεις του κύκλου (χρόνος περίοδος, περιοδικά φαινόμενα, αλλά και λίγο με αριθμολογία) φθάνει στον μαθηματικό ορισμό του κύκλου και λέει:

Ο ορισμός λέει ότι ο κύκλος είναι σχήμα , αφού προφανώς είναι περιορισμένο και περικλείεται σε όλες τις πλευρές από ένα απλό σύνορο και έτσι δεν ανήκει στην φύση του απείρου, αλλά στην φύση του πέρατος. Και είναι επίπεδο σχήμα. Και μάλιστα πρώτο από όλα, αφού περιέχεται μέσα σε μια απλή γραμμή που δεν έχει ποικιλία στα σύνορά της. Μοιάζει έτσι με την μονάδα. Επί πλέον είναι το μόνο σχήμα που από το κέντρο του , όλες οι εκβαλόμενες προς τις πλευρές του είναι ίσες, διότι σε άλλα κάποιες είναι ίσες και κάποιες όχι.

Λέει ακόμα ο Πρόκλος, ότι κύκλος δεν μπορεί να έχει δύο κέντρα.

Τελειώνει δε με φιλοσοφικές και θεολογικές προσεγγίσεις του κύκλου.

ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝ.ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μάθημα : Ιστορία των Μαθηματικών

Διδάσκων : Στυλιανός Νεγρεπόντης

ΕΡΓΑΣΙΑ 5 : (Μόνο για τους μεταπτυχιακούς)

«Περί της ρύσεως σημείου και για το αν αφορά την ένυλον ή άϋλον ευθεία του ισχυρισμού του G. Morrow . πάνω στα Σχόλια εις Στοιχεία του Ευκλείδη υπό του Πρόκλου
1)Επιχειρήματα περί ενύλου ή αύλου ευθείας.
2) Πώς βλέπει ο Πρόκλος τον ορισμός της ευθείας σε σχέση με τα τρία πρώτα Ευκλείδεια αιτήματα»

Μεταπτυχιακός φοιτητής : Ιωάννης Π. Πλατάρος

Αριθμός μητρώου: 211.502

ΑΘΗΝΑ 2001

Πρόκλος , Σχόλια στα Στοιχεία του Ευκλείδη (97, 6-17)

'Af or.zont ai dὲ αὐ τὴ ν καὶ κατ' ἄλλας μεθό δους, oƒ mὲν ῥύ σιν σημείου λέγοντες, oƒ dὲ μέγεθος ἐφ' εν διαστατό ν. ἀλλ' oát oj mὲν ὁ ὅ ρος τέλειό ς ἐστιν τὴ ν οὐ σίαν σημαίνων τῆ ς γραμμῆ ς, Ð dὲ σημείου ῥύ σιν εἰπὼν ἔοικεν ἀπὸ τῆ ς αἰτίας αὐ τὴ ν τῆ ς γεννητικῆ ς δηλοῦν καὶ οὐ πᾶσαν γραμμὴ ν ἀλλὰ τὴ ν ἄυλον παρ-ίστησι· taÚthn g¦ r Øf .sthsi tÕ shme‹on ¢merὲς ὑ πάρ-χον, Øp£rxewj dὲ τοῖς μεριστοῖς αἴτιον ὄ ν. ¹ dὲ ῥύ σις τὴ ν πρό οδον ἐνδείκνυται καὶ τὴ ν γό νιμον δύ ναμιν, τὴ ν ἐπὶ πᾶσαν διάστασιν φθάνουσαν καὶ οὐ κ ἐλαττου-μένην, t¾n aÙt¾n mὲν ἑστῶσαν, p©si dὲ τοῖς μεριστοῖς τὴ ν οὐ σίαν παρεχομένην.

Ερμηνευτική απόδοση

Ορίζουν δε την γραμμή και με άλλους τρόπους.
Άλλοι μεν λένε ροή του σημείου, άλλοι δε, μέγεθος σε μια διάσταση[1].
Αλλά ο δεύτερος ορισμός μας δείχνει τέλεια την ουσία (περιεχόμενον) της γραμμής. Αυτός δε που λέει για την ρύσιν σημείου, φαίνεται να την εξηγεί από την σκοπιά της γεννητικής της αιτίας. Και είναι φανερόν, ότι δεν παριστάνει κάθε γραμμή, αλλά την άϋλον.[2] Διότι αυτή δίνει υπόσταση στο σημείο , αν και αμερές

[1] Ο Αριστοτέλης στα Μεταφυσικά , (1020^{α} 11-12) λέει χαρακτηριστικά: **«μεγέθους dὲ τὸ mὲν ἐφ' εν sunecὲς μῆκος, τὸ δ' ἐπὶ δύ ο πλάτος, τὸ δ' ἐπὶ τρία βάθος.»**

[2] Σε αυτό το κομμάτι ο G. Morrow έχει αντικαταστήσει στο αρχαίο κείμενο την λέξη «άϋλον» με «ένυλον» γράφοντας σχετικά: (μετάφραση) Το κείμενο διαβάζεται ως άϋλον, αλλά αυτό είναι ολίσθημα. Διότι η γραμμή διαγράφει την άμεση υλική της συνέπεια και το έχω μεταφράσει αναλόγως , όπως ο ver Eecke

να υπάρχει. Είναι δε το σημείο , αίτιο της υπάρξεως των πραγμάτων που μπορούν να μεριστούν. Η δε ρύσις φανερώνει την πρόοδο και την γόνιμη δύναμη , η οποία φθάνει σε όλες τις διαστάσεις και η οποία δεν ελαττώνεται και να παραμένει καθ΄ εαυτή η ίδια. Σε όλα δε τα μεριστά πράγματα , παρέχει την ουσία[3].(περιεχόμενον)

<u>Πρόκλος , Σχόλια στα Στοιχεία του Ευκλείδη</u> 179,22-180,1

. oŒon tÕ mèν ἀπὸ σημείου γραμμὴ ν
εὐ θεῖαν ἐπὶ σημεῖον ἀγαγεῖν ὡ ς πρό χειρον λαμβάνει
καὶ εὐ πό ριστον. τῇ γὰρ ὁ μαλῇ ῥύ σει τοῦ σημείου
συγκινουμένη καὶ συμπροιοῦσα τῷ μηδαμοῦ μᾶλλον
καὶ ἧ ττον ἀπονεύ ειν εἰς τὸ ἕτερον καταντᾷ σημεῖον.

Ερμηνευτική απόδοση[4]

Για παράδειγμα, όταν σχεδιάζουμε μια ευθεία από ένα σημείο σε ένα άλλο, αυτό είναι κάτι που (η σκέψη μας) λαμβάνει ως προφανές και το προσπορίζεται εύκολα. Διότι (η σκέψη μας) κινουμένη μαζί με την ομαλή ρύση του σημείου, ακολουθούσα περισσότερο προς την μία πλευρά και λιγότερο στην άλλη , φθάνει και συναντά το άλλο σημείο.

Επίσης ο Β. Σπανδάγος που έχει μεταφράσει μάλλον τον G. Morrow παρά το αρχαίο κείμενο, σε σχετική υποσημείωση στην μετάφραση του χωρίου, μας πληροφορεί , ότι ο Friedlein αναφέρει «άϋλον» αντί του ορθού υλική και προσθέτει ότι την άποψη αυτή συμμερίζοντι και οι P. Eecke και G. Morrow.

[3] Στην μετάφραση του αρχαίου κειμένου του Β. Σπανδάγου στα σχόλια του Πρόκλου στα Στοιχεία του Ευκλείδη, η ουσία επιλέγεται να σημαίνει το περιεχόμενο της ύλης, αφού έχει προηγηθεί η λανθασμένη ερμηνεία με το «ένυλον» σημείο. Κι εδώ το κείμενο στις υποσημειώσεις της μετάφρασης, ακολουθεί πιστά τις απόψεις του βιβλίου του G. Morrow.

[4] Ακολουθώ το πνεύμα της ερμηνευτικής απόδοσης του G. Morrow.

Πρόκλος , Σχόλια στα Στοιχεία του Ευκλείδη (185,1-187,18)

Pet. I–III. Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸ ς σημείου ἐπὶ
πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴ ν ἀγαγεῖν καὶ
peper asmšnhn eÙqe‹an kat¦ tÕ sunecὲς ἐπ'
εὐθείας ἐκβαλεῖν καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ δια-
στήματι κύκλον γράψαι.

Ταῦτα τὰ τρία καὶ ἐναργείας ἕνεκα καὶ τοῦ πορί-
σασθαί τι προστάττειν ἡμῖν ἐν τοῖς αἰτήμασιν ἐξ
ἀνάγκης ταχθήσεται κατά γε τὸ ν Γεμῖνον. tÕ mὲν γὰρ
ἀπὸ παντὸ ς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμ-
m¾n ¢gage‹n ˜pÒmenÒn ™sti tù ·Úsin εἶναι τοῦ σημείου
τὴ ν γραμμὴ ν καὶ τὴ ν εὐθεῖαν ὁμαλὴ ν καὶ ἀπαρέγκλι-
τον ῥύσιν. νοήσαντες οὖν τὸ σημεῖον κινούμενον τὴ ν
ὁμαλὴ ν καὶ ἐλαχίστην κίνησιν ἐπὶ θάτερον σημεῖον
καταντήσομεν, ka˜ tÕ prîton a‡thma gšgonen oÙdὲν
ποικίλον ἡμῶν ἐπινενοηκό των. e„ dὲ δὴ τῆς εὐθείας
σημείῳ περατουμένης ὡσαύτως νοήσαιμεν τὸ πέρας
αὐτῆς κινούμενον τὴ ν ἐλαχίστην καὶ ὁμαλὴ ν κίνησιν,
œstai tÕ deÚter on a‡thma porisqὲν ἀπὸ εὐμηχάνου
καὶ ἁπλῆς ἐπιβολῆς. e„ dὲ αὖ μένουσαν μὲν τὴ ν πε-
περασμένην εὐθεῖαν κατὰ θάτερον, kinoumšnhn dὲ
περὶ τὸ μένον κατὰ τὸ λοιπό ν, τὸ τρίτον ἂν εἴη γένος.
kšntron mὲν γὰρ ἔσται τὸ μένον σημεῖον, διάστημα
dὲ ἡ εὐθεῖα. ὅση γὰρ ἂν αὕτη τυγχάνῃ, τοσοῦτο
ἔσται τὸ ἀπό στημα τοῦ κέντρου πρὸ ς πάντα τὰ μέρη
τῆς περιφερείας. εἰ δέ τις ἀποροίη, πῶς κινήσεις ἐπ-
εισάγομεν τοῖς γεωμετρητοῖς ἀκινήτοις οὖσιν, pîj dὲ
τὰ ἀμερῆ κινοῦμεν–taàta g¦ r ¢dÚnata εἶναι παν-
τελῶς–ἀξιώσομεν αὐτὸ ν μὴ παντάπασιν δυσχεραί-
νειν μεμνημένον τῶν ἐν ἀρχῇ προαποδεδειγμένων, ὡς

ἄρα περὶ τῶν ἐν φαντασίᾳ κειμένων οἱ λόγοι γράφουσιν ἐκεῖ πάντα τὰ τῆς διανοίας εἰκόνας ὧν ἔχει λόγων. τὸ γὰρ ἄγραφον γραμματεῖον οὗτος ἦν ὁ τελευταῖος νοῦς καὶ παθητικός. ἀλλ' oÙdὲν ἡμῖν ὁ λόγος οὗτος. ὁ γάρ τοι νοῦς ὁ τὰ εἴδη δεχόμενος ἀλλαχόθεν διὰ κινήσεως αὐτὰ δέχεται. t¾n dὲ κίνησιν μήτοι σωματικὴν ἀλλὰ φανταστικὴν νοήσωμεν καὶ τὰ ἀμερῆ τὰς mὲν σωματικὰς κινήσεις κινεῖσθαι μὴ συγχωρῶμεν τὰς dὲ αὖ φανταστικὰς διεξόδους ὑπομένειν. καὶ γὰρ ὁ νοῦς ἀμερὴς ὢν κινεῖται καὶ οὐ τοπικῶς καὶ ἡ φαντas.a kat¦ tÕ ˜autÁj ¢merὲς ἔχει κίνησιν ἰδίαν· ¹mexj dὲ εἰς τὰς σωματικὰς κινήσεις ἀποβλέποντες ἀπογινώσκομεν τῶν ἐν τοῖς ἀδιαστάτοις κινήσεων. τοῦ mὲν οὖν σωματικοῦ τόπου καὶ τῶν ἔξω κινήσεων τὰ ἀμερῆ καθαρεύει· kin»sewj dὲ ἄλλο εἶδος καὶ τόπος ἄλλος ἐπ' αὐτῶν θεωρεῖται ταῖς κινήσεσι σύστοιχος, ἐπεὶ καὶ θέσιν ἔχειν τὸ σημεῖον ἐν τῇ φαντασίᾳ λέγομεν καὶ οὐ ζητοῦμεν, pîj ¢merὲς ἔτι δύναται μένειν τὸ κινούμενόν που καὶ περιεχόμενον ὑπὸ τοῦ τόπου. tÒpoj g¦r tîn mὲν διαστατῶν διαστατός ἐστι, tîn dὲ ἀμερῶν ἀδιάστατος. ἄλλα οὖν τὰ ἰδίως τῶν γεωμετρητῶν εἴδη καὶ ἄλλα τὰ ἀπ' ἐκείνων ὑφιστάμενα, καὶ ἄλλη τῶν σωμάτων κίνησις, ἄλλη τῶν ἐν φαντασίᾳ νοουμένων, καὶ ἄλλος ὁ τῶν διαστατῶν τόπος, ἄλλος ὁ τῶν ἀμερῶν. καὶ χρὴ ταῦτα διελομένους μὴ συγχεῖν mhdὲ ἐπιταράττειν τῶν πραγμάτων τὰς οὐσίας.

”Eoiken m¾n tîn triîn toÚtwn a„thm£twn tÕ mὲν πρῶτον ἐν εἰκόσιν ἡμῖν ἐμφανίζειν, ὅπως τὰ ὄντα περιέχεται ἐν τοῖς αὐτῶν αἰτίοις ἀμερεστέροις οὖσι καὶ ὁρίζεται ἀπ' αὐτῶν, καὶ ὅτι καὶ πρὶν ὑποστῆ πανταχόθεν ὑπ' ἐκείνων περιείληπται—καὶ γὰρ ἡ εὐθεῖα

τῶν σημείων ὄ ντων ἐπὶ θάτερον ἀπὸ θατέρου ἐπι-
ζεύ γνυται καὶ περατοῦται ὑ π' αὐ τῶν καὶ μεταξὺ αὐ τῶν
ἀπείληπται– tÕ dè δεύ τερον, ὅ πως τὰ ὄ ντα ἐχό μενα
τῶν οἰκείων ἀρχῶν πρό εισιν ἐπὶ πάντα τήν τε πρὸ ς
ἐκεῖνα συνέχειαν φυλάττοντα καὶ μὴ ἀποσπώμενα ἀπ'
αὐ τῶν, ἀλλὰ διὰ τὴ ν ἀπειροδύ ναμον αἰτίαν πάντη
ἐπειγό μενα χωρεῖν, tÕ dè τρίτον, ὅ πως τὰ προελθό ντα
πάλιν ἐπιστρέφεται πρὸ ς τὰς οἰκείας ἀρχάς. ἡ γὰρ
τοῦ κινουμένου περὶ τὸ μένον στροφὴ τὸ ν κύ κλον
ἀπογεννῶσα μιμεῖται τὴ ν κατὰ κύ κλον ἐπάνοδον.

Ερμηνευτική απόδοση του χωρίου :

(Μετά τα Ευκλείδεια αξιώματα)

Αυτά τα τρία, εξ αιτίας της καθαρότητας και του προστάγματος να ποριστούμε κάτι, είναι κατά τρόπο απαραίτητο ταξινομημένα μεταξύ των αξιωμάτων. , σύμφωνα με τον Γέμινον. Ο σχεδιασμός της γραμμής από οποιοδήποτε σημείο σε άλλο, έπεται της συλλήψεως της γραμμής ως ροής σημείου και της ευθείας , ως της ομοιόμορφης και χωρίς αποκλείσεις ροής του.

Γιατί , αν θεωρήσουμε το σημείο να κινείται ομοιόμορφα, στον συντομότερο δρόμο, θα έλθουμε στο άλλο σημείο και έτσι θα έχουμε το πρώτο αίτημα , χωρίς καμία σύνθετη διαδικασία σκέψεως.

Και αν πάρουμε μία ευθεία γραμμή ως περιορισμένη από ένα σημείο(δηλ. ευθ. τμήμα) και όμοια φανταστούμε το άκρο της ως κινούμενο ομοιόμορφα στον συντομότερο δρόμο , το δεύτερο αίτημα θα προκύψει με ευμήχανο τρόπο και απλά επιβάλλεται.

Και αν σκεφθούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα που να έχει το ένα του άκρο σταθερό και το άλλο του άκρο να κινείται γύρω από το σταθερό σημείο, θα λέγουμε παράξει το τρίτο αίτημα. , γιατί το σταθερό σημείο θα είναι το κέντρο και η το ευθ. τμήμα η ακτίνα και οποιοδήποτε και να είναι το μήκος αυτής της γραμμής, , θα είναι η απόσταση (το απόστημα) που ξεχωρίζει το κέντρο από όλα τα σημεία

της περιφέρειας. Αν δε κάποιος απορία εκφράσει σχετικά με το πώς μπορούμε να εισάγουμε κινήσεις στα γεωμετρικά αντικείμενα που είναι ακίνητα, και πώς κινούμε τα αμερή, (διότι αυτό είναι παντελώς αδύνατον) , θα αξιώσουμε από αυτόν, να μην δυσανασχετεί και θα του υπενθυμίσουμε αυτό που αποδείχθηκε στην εισαγωγή για τα πράγματα στην φαντασία. , δηλαδή, , δηλαδή ότι οι ιδέες μας εγγράφουν εδώ (στην φαντασία) τις εικόνες όλων των πραγμάτων για τα οποία η αντίληψη έχει ιδέα και ότι αυτή η άγραφη πινακίδα, είναι η κατώτερη μορφή του νου , ή «παθητική» . η δήλωση αυτή όμως δεν διώχνει την δεν απαλείφει τις δυσκολίες μας, γιατί ο νους που λαμβάνει αυτές τις μορφές από αλλού τις λαμβάνει μέσω της κινήσεως. Αλλά ας σκεφθούμε αυτή την κίνηση, όχι ως κίνηση σώματος, αλλά ως φανταστική. Και ας μην παραδεχθούμε ότι τα πράγματα χωρίς μέρη κινούνται με τρόπους σωμάτων, αλλά περισσότερο να παραδεχθούμε ότι υπόκεινται στους τρόπους της φαντασίας. Γιατί και ο νούς(σκέψη) , αν και χωρίς μέρη, κινείται αλλά όχι στον χώρο. Και η φαντασία έχει το δικό της είδος κινήσεως το οποίο ανταποκρίνεται στο γεγονός, ότι η ίδια είναι χωρίς μέρη.

Τα χωρίς μέρη πράγματα, δεν έχουν υλικό διάστημα και εξωτερικές κινήσεις, αλλά ένα άλλο είδος κινήσεως, και άλλο τόπο(διάστημα) που είναι σύστοιχος(προσιδιάζει) με την κίνησή τους και που μπορεί να διακριθεί σε αυτά. Λέμε ότι το σημείο έχει θέση στην φαντασία και δεν ρωτάμε πως κάτι μπορεί να παραμείνει χωρίς μέρη και όμως να κινείται κάπου και να περιέχεται από το διάστημα . Ο τόπος των διαστατών είναι διαστατός και των αδιαστάτων(=αμερών) αδιάστατος .

Συνεπώς οι μορφές που είναι χαρακτηριστικές σε γεωμετρικά αντικείμενα, είναι αρκετά διαφορετικές , από τα πράγματα των οποίων η ύπαρξη προέρχεται από αυτά. Η κίνηση των σωμάτων είναι αρκετά διαφορετική από την κίνηση των αντικειμένων που περιλαμβάνει η φαντασία. Αυτά πρέπει να τα κρατήσουμε χωριστά , να μην τα συγχέουμε και να μην ανακατεύουμε τις φύσεις των πραγμάτων.

Φαίνεται ότι από αυτά τα τρία αιτήματα, το πρώτο εκφράζει με μια εικόνα το πώς υπαρκτά πράγματα περιέχονται μεταξύ των πιο αμερών αιτίων τους και

περιορίζονται από αυτά. Και ακόμα περιλαμβάνονται σε αυτά σε όλες τις μορφές πρίν ακόμη έλθουν σε ύπαρξη. Η ευθεία γραμμή για παράδειγμα, συνδέει ήδη υπάρχοντα σημεία μεταξύ τους, περιορίζεται από αυτά και περιλαμβάνεται μεταξύ αυτών. Τα δεύτερο αίτημα δείχνει πως τα πράγματα μπορούν να κρατιούνται σταθερά στις δικές τους πηγές και ακόμα να βγαίνουν έξω προς άλλα πράγματα διατηρώντας την συνέχεια και τις αρχές τους και δεν ξεχωρίζονται από αυτές. Αλλά πάντα οδηγημένα από την παντοδύναμη αιτία, μέσα σε αυτά να προχωρούν. Και το τρίτο αίτημα δείχνει ότι οτιδήποτε πάει μπροστά , γυρίζει πάλι στο δικό του σημείο εκκινήσεως , διότι η περιστροφή του κινουμένου μέρους του ευθ. τμήματος γύρω από το σταθερό του πέρας, μιμείται την κυκλική επιστροφή.

Επιχειρήματα υπέρ της αύλου ευθείας

Η επέμβαση που έκανε ο G. Morrow στο αρχαίο κείμενο , ομοιάζει αψυχολόγητη και αυτό θα προσπαθήσουμε να καταδείξουμε επικαλούμενοι κάποια επιχειρήματα:

- Ο Αριστοτέλης στα μετά τα φυσικά Β΄(102a 4-8) αναφερόμενος στο οντολογικό πρόβλημα της ουσίας των γεωμετρικών αντικειμένων, αναφέρει. : «ἀλλὰ μὴ ν τό γε σῶμα ἧττον οὐσία τῆς ἐπιφανείας, καὶ αὕτη τῆς γραμμῆς, καὶ αὕτη τῆς μονάδος καὶ τῆς στιγμῆς· ρ τούτοις γὰρ ὥρισται τὸ σῶμα, καὶ τὰ μὲν ἄνευ σώματος ἐνδέχεσθαι δοκεῖ εἶναι τὸ δὲ σῶμα ἄνευ τούτων ἀδύνατον»

Δηλαδή: , Αλλά και το σώμα είναι λιγότερο ουσία από την επιφάνεια, και η επιφάνεια λιγότερο ουσία από την γραμμή και η γραμμή λιγότερο ουσία από από την μονάδα και το σημείο, αφού από όλα αυτά ορίζεται το σώμα. Αυτά μεν φαίνεται ότι είναι δυνατόν να υπάρξουν χωρίς σώμα. Το σώμα δε, είναι αδύνατον να υπάρξει χωρίς αυτά.

Λίγο πιο κάτω ο Αριστοτέλης (Μετά τα φυσικά Β΄102a 13- 20) λέει :

«ἀλλὰ μὴ ν εἰ τοῦτο μὲν ὁμολογεῖται, ὅτι μᾶλλον οὐσία τὰ μήκη τῶν σωμάτων καὶ αἱ στιγμαί, ταῦτα δὲ μὴ ὁρῶμεν ποίων ἂν εἶεν σωμάτων (ἐν γὰρ τοῖς αἰσθητοῖς ἀδύνατον εἶναι), οὐκ ἂν εἴη οὐσία οὐδεμία. ἔτι δὲ φαίνεται ταῦτα πάντα διαιρέσεις ὄντα τοῦ σώματος, τὸ μὲν εἰς πλάτος τὸ δ' εἰς βάθος τὸ δ' εἰς μῆκος»

Δηλαδή, αν δεχόμαστε τα μήκη των σωμάτων και τα σημεία είναι περισσότερο ουσίες από τα σημεία ότι περισσότερο ουσίες από τα ίδια τα σώματα, και παρ´ όλα αυτά δεν βλέπουμε σε τι είδους σώματα μπορούν να ανήκουν (διότι αποκλείεται να ανήκουν σε αισθητά σώματα) τότε δεν υπάρχει καμία ουσία. Επί πλέον όλα αυτά είναι διαιρέσεις σώματος σε πλάτος σε βάθος ή σε μήκος.
Οι παραπάνω απόψεις του Αριστοτέλους περισσότερο περιπλέκουν το πρόβλημα , αν και υπάρχει μια ξεκάθαρη θέση του, ότι δηλαδή , τα Γεωμετρικά αντικείμενα κατ´ ουδένα τρόπο έχουν υλική υπόσταση (πέρα από το πρόβλημα της οντολογίας τους) Αυτό φαίνεται να ρίχνει ένα φως , αφού και ο Πρόκλος καλώς γνώριζε το έργο του Αριστοτέλη. Πρέπει λοιπόν να δεχθούμε –καθώς Αριστοτέλης έφα, - ότι δεν υφίσταται υλική γραμμή.

- «Τα μεριστά» πράγματα που αναφέρονται στο κείμενο του Πρόκλου, είναι σαφώς γεωμετρικά αντικείμενα , όπως ευθ. τμήματα, ευθείες, γραμμές , επίπεδα, γωνίες , τα οποία προφανώς και δεν έχουν υλική υπόσταση. Αν δεχόμαστε υλική υπόσταση για την ευθεία, τότε θα είχαμε και υλική επιφάνεια και υλική γωνία και –τέλος- υλικά γεωμετρικά σχήματα, αφού σύμφωνα και με τον Πρόκλο, τα ανώτερης διάστασης γεωμετρικά αντικείμενα έχουν ως μέρη γ. αντικείμενα κατώτερης διάστασης. Είναι λοιπόν εύλογο να υποθέσουμε ότι η υλική υπόσταση των δομικών στοιχείων προσδίδει υλική υπόσταση και στα παράγωγα . Όταν λοιπόν δεχθούμε ‘ότι το σημείον είναι μη υλικό , μη υλικά θα είναι και όλα τα παράγωγα αυτού. Κι αυτό δεν έχει να κάνει με την υπόλοιπη οντολογική υπόσταση του σημείου .
- Προφανώς οιονεί έννοια «υλική ευθεία» ουδαμού αναφέρεται, αν και ο G. Morrow χρησιμοποιεί τον όρο, ως παράγωγο της ρύσεως σημείου . Φαίνεται όμως να κάνει –όπως θα έλεγε κι ο Αριστοτέλης- «λήψη του ζητουμένου»
- Ο Πρόκλος δεν έχει κανένα πρόβλημα με τον ορισμό του σημείου από τον Ευκλείδη ως οντότητας που δεν έχει μέρος . Συνεπώς , πώς θα μπορούσε μια οντότητα που δεν έχει μέρος , να έχει υλική υπόσταση; Οι απόψεις του Δημοκρίτου περί του έσχατου ορίου της ύλης , προφανώς(μπορούμε να εικάσουμε βασίμως) ήταν γνωστές στον Πρόκλο . Μάλιστα η οντολογική φύση του ατόμου σημαίνει το μη επ´ άπειρον διαιρετόν των υλικών πραγμάτων . Ο Δημόκριτος ήταν σαφής

λέγοντας το έσχατο όριο της ύλης άτομο (= α στερητικό + τομή) Η οντολογική φύση όμως του σημείου επιτρέπει την επ΄ άπειρον διαίρεση λ.χ. ενός ευθυγράμμου τμήματος , πράγμα που αυτομάτως αποκλείει την υλική υπόσταση του σημείου.

- Ο Πρόκλος (**179,22-180,1)** λέει ότι ότι όταν **σχεδιάζουμε** μια γραμμή , αυτό η σκέψη μας το προσλαμβάνει εύληπτα . Διότι (**η σκέψη μας) ακολουθώντας** την ομαλή ρύση του σημείου , και προχωρώντας χωρίς παρέκκλιση πιο πολύ στο ένα μέρος από ό,τι στο άλλο, φθάνει στο άλλο σημείο.

  Είναι προφανές , ότι ο Πρόκλος ομιλεί για μια πραγματική ρύση πέννας ή μολυβδίδος ή κιμωλίας σε άβακα ή άλλη επιφάνεια την οποία ακολουθεί η σκέψη μας **βλέποντας την ροή** –τροχιά της **γραφικής ύλης .**

- Λέει ο Πρόκλος στο τρίτο προαναφερόμενο χωρίο, ότι «ἐπεὶ καὶ θέσιν ἔχειν τὸ σημεῖον ἐν τῇ φαντασίᾳ λέγομεν καὶ οὐ ζητοῦμεν, πῶς ἀμερὲς ἔτι δύ ναται μένειν τὸ κινού μενό ν» Κατά την γνώμη μας αυτό παραπέμπει ευθέως στην φανταστική –και άρα άυλον - θεώρηση της ρύσης του σημείου.

<u>Πώς βλέπει ο Πρόκλος τον ορισμό της ευθείας ως ρύσεως σημείου, σε σχέση με τα τρία πρώτα Ευκλείδεια αιτήματα.</u>

- Η πρώτη ενδιαφέρουσα παρατήρηση που κάνει ο Πρόκλος σε σχέση με τον ορισμό της ρύσεως σημείου , είναι ότι ο σχεδιασμός μιας γραμμής από οποιοδήποτε σημείο σε οποιαδήποτε σημείο, **έπεται** της συλλήψεως της γραμμής ως ρύσεως σημείου. Θεωρεί δε μάλιστα την θεώρηση της ρύσεως ως υποβοηθητική για την καλύτερη σύλληψη του νοήματος του πρώτου αιτήματος[5]

[5] , καὶ τὸ πρῶτον αἴτημα γέγονεν οὐδὲν ποικίλον ἡμῶν ἐπινενοηκό των

- Επίσης **προσαρμόζει** την ρύσιν σημείου και στο δεύτερο αίτημα, λέγοντας , ότι αν πάρουμε μια γραμμή που είναι περιορισμένη από ένα άκρο σημείο και φανταστούμε αυτό το άκρο να προεκτείνεται προς το άκρο κατά τον συντομότερο δρόμο , τότε θα πάρουμε το δεύτερο αίτημα με καλό μηχανικό[6] τρόπο. [7]
- Εξετάζει επίσης ο Πρόκλος και την ρύσιν του σημείου ως δημιουργούντος περιφέρεια κύκλου. [8]

Με την παραπάνω θεώρηση ο Πρόκλος, μας υποδεικνύει με ενάργεια, το πώς τα τρία κατασκευαστικά αιτήματα του Ευκλείδη, νοούμενα με την βοήθεια της ρύσεως σημείου , ουσιαστικά δίνουν και τις ίδιες τις κατασκευές (με την βοήθεια της –φανταστικής- ρύσεως σημείου.)

Πρέπει επίσης να σχολιασθεί το γεγονός ότι ο Πρόκλος χρησιμοποιεί ταυτόχρονα με την ρύσιν του σημείου και τον **Αρχιμήδειο ορισμό** της ευθείας περί **«ελαχίστης αποστάσεως»** μεταξύ δύο σημείων, πράγμα που προϋποτίθεται ώστε η φαντασίας μας να συλλάβει την έννοια της ρύσεως.

Για την διαφαινόμενη αντίφαση και εύλογη ένσταση που θα μπορούσε να εκφράσει κάποιος λέγοντας για το τι νόημα θα μπορούσε να είχε η κίνηση αμερούς οντότητας όπως το σημείο, δίνει την απάντηση ότι σε αυτό ότι τα αμερή υπόκεινται στους τρόπους της φαντασίας[9] . Αυτό θα μπορούσε δε να συνιστά και επιπρόσθετο επιχείρημα περί του αύλου χαρακτήρα της ρύσεως σημείου και παράγογα της ευθείας.

---

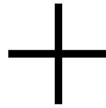
[6] ο Μηχανικός τρόπος εννοιολογικά πάντα προϋποθέτει κίνηση.

[7] «ὡ σαύ τως νοήσαιμεν τὸ πέρας αὐ τῆ ς κινού μενον τὴ ν ἐλαχίστην καὶ ὁ μαλὴ ν κίνησιν, ἔσται τὸ δεύ τερον αἴτημα porisqὲν ἀπὸ εὐ μηχάνου καὶ ἁπλῆ ς ἐπιβολῆ ς»

[8] «εἰ dὲ αὖ μένουσαν mὲν τὴ ν πεπερασμένην εὐ θεῖαν κατὰ θάτερον, κινουμένην dὲ περὶ τὸ μένον κατὰ τὸ λοιπό ν, τὸ τρίτον ἂν εἴη γένος. κέντρον mὲν γὰρ ἔσται τὸ μένον σημεῖον, διάστημα dὲ ἡ εὐ θεῖα. ὅ ση γὰρ ἂν αὕ τη τυγχάνῃ, τοσοῦτο ἔσται τὸ ἀπό στημα τοῦ κέντρου πρὸ ς πάντα τὰ μέρη τῆ ς περιφερείας»

[9] «τὴ ν dὲ κίνησιν μή τοι σωματικὴ ν ἀλλὰ φανταστικὴ ν νοήσωμεν καὶ τὰ ἀμερῆ τὰς mὲν σωματικὰς κινήσεις κινεῖσθαι μὴ συγχωρῶμεν τὰς dὲ αὖ φανταστικὰς διεξό δους ὑ πομένειν»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΑΓΑΠΗΣ ΚΙ ΕΥΤΥΧΙΑΣ


Απλό γραμμικό μοντέλο

- dR /dt = a R + b J
- dJ /dt = c R + d J
- όπου

  R είναι η αγάπη του Ρωμαίου για την Ιουλιέτα
  J είναι η αγάπη της Ιουλιέτας για τον Ρωμαίο
  (ή μίσος αν είναι αρνητικές οι τιμές τους)
  a , b , c , d είναι σταθερές που καθορίζουν τα «ρομαντικά στυλ»

> Να λυθεί το σύστημα για τις παρακάτω τιμές των παραμέτρων
> $a>0$, $b<0$, $c<0$
> και να ερμηνευτεί το αντίστοιχο «ρομαντικό στυλ»

Λύση

Μετασχηματισμός του απλού γραμμικού συστήματος σε γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές .

dR/dt = a R + b J (1)

dJ/dt = c R + d J (2)

Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε

$d^2R/dt^2 = a\, dR/dt + b\, dJ/dt$ (3)

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με d και την (2) με b και έχουμε
d dR/dt = ad R + bd J
b dJ/dt = cb R + db J
τις αφαιρούμε κατά μέλη και παίρνουμε
d dR/dt - b dJ/dt = (ad - cb)R $\Rightarrow$
b dJ/dt = d dR/dt + (cb -ad)R (4)

η (3) με βάση την (4) γίνεται
d^2R/dt^2 =(a + d)dR/dt + (cb -ad)R $\Rightarrow$
d^2R/dt^2 +x dR/dt + y R = 0 όπου x=-(a + d) και y= ad – cb

Λύση της διαφορικής εξίσωσης R″+x R′+y R = 0 (5).

Επειδή η συνάρτηση R(t)=e^{ct} έχει την ιδιότητα ότι οι R′(t) και R″(t) είναι πολλαπλάσια της R(t) είναι εύλογο να αναζητήσουμε λύσεις της μορφής e^{ct}.

Αντικαθιστώντας στην (5) έχουμε
$(c^2+x c+y) e^{ct}=0$ και εφόσον ο παράγοντας e^{ct} δεν μηδενίζεται έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο c^2+a c+y ισούται με 0 .
$c^2+x c+y = 0 \Rightarrow$

$c_{1\,2}=[-x \pm\sqrt{(x^2-4y)}]/2$

<u>περίπτωση 1</u>

Αν x^2-4y>0 οι c_1 και c_2 είναι πραγματικές και διακεκριμένες ρίζες . Οι συναρτήσεις $R_1(t)=e^{c_1 t}$ και $R_2(t)=e^{c_2 t}$ είναι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις εφόσον η ορίζουσα Wronski είναι διάφορη του μηδενός .

$$W(R_1,R_2)(t)=\begin{vmatrix} R_1(t) & R_2(t) \\ R_1'(t) & R_2'(t) \end{vmatrix}=(c_2-c_1)\,e^{(c_2-c_1)t} \neq 0$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι η

R(t)=$k_1 e^{c_1 t}$ +k_2 $e^{c_2 t}$

περίπτωση 2

Αν x^2-4y<0 οι c_1 και c_2 είναι μιγαδικές ρίζες . Έστω ότι $c_{1,2}$=α ± βi με
α,β $\in \Re$. Τότε η γενική λύση είναι η
R(t)= k_1 $e^{(\alpha-\beta i)t}$ +k_2 $e^{(a+\beta i)t}$
Η μιγαδική αυτή λύση δίνει πραγματική λύση με τη βοήθεια του τύπου του Euler ($e^{i\theta}$=συνθ+i ημθ) .

περίπτωση 3

Αν x^2-4y=0 , έχουμε δηλαδή διπλή ρίζα , τότε c_1=c_2 =c_0 και προφανώς μία λύση είναι η $e^{c_0 t}$.Για να βρούμε μία δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του υποβιβασμού τάξης . Η γενική λύση είναι

R(t)=(k_1+k_2t) $e^{c_0 t}$

Επιστροφή στο πρόβλημά μας .

$c_{1,2}$=[-x ±√(x^2-4y)]/2⇒ $c_{1,2}$=[(a+d) ±√($(a-d)^2$+4bc)]/2
Η διακρίνουσα είναι θετική διότι $(a-d)^2$≥0 και 4bc>0 ,διότι b,c ομόσημα .
Εμπίπτει στην πρώτη περίπτωση και άρα έχουμε

R(t)=k_1 $e^{c_1 t}$ +k_2 $e^{c_2 t}$ και λόγω της (1)

J (t)= $\frac{k_1}{b}(c_1-a)e^{c_1 t}+\frac{k_2}{b}(c_2-b)e^{c_2 t}$

Για να ερμηνεύσουμε το «ρομαντικό στυλ» θα υποθέσουμε (τελείως εικονικά) ότι R(0)=2 ,J(0)=2 , a=2 , b=-1 ,c=-1 και d=2 $c_1=3$, $c_2=1$

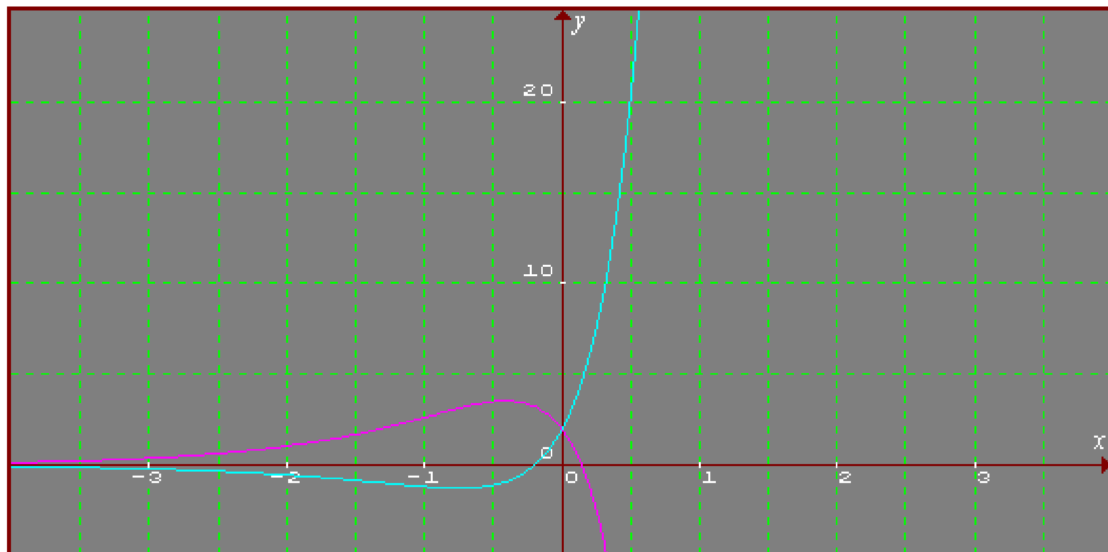
$R(0)=2 \Rightarrow K_1+K_2=2$

$J(0)=2 \Rightarrow -K_1-2K_2=2$ συνεπώς $K_1=6$ και $K_2=-4$

Οι συναρτήσεις R,J γίνονται

$R(t)=6\, e^{3t}-4e^{t}$
$J(t)=-6\, e^{3t}+8e^{t}$

Από την παρακάτω γραφική παράσταση (με γαλάζιο η C_R και με ροζ η C_J) φαίνεται ότι η αγάπη του Ρωμαίου δεν έχει ανταπόκριση .Παρόλα αυτά η αγάπη του αυξάνεται σε αντίθεση με αυτή της Ιουλιέτας που συνεχώς μειώνεται .

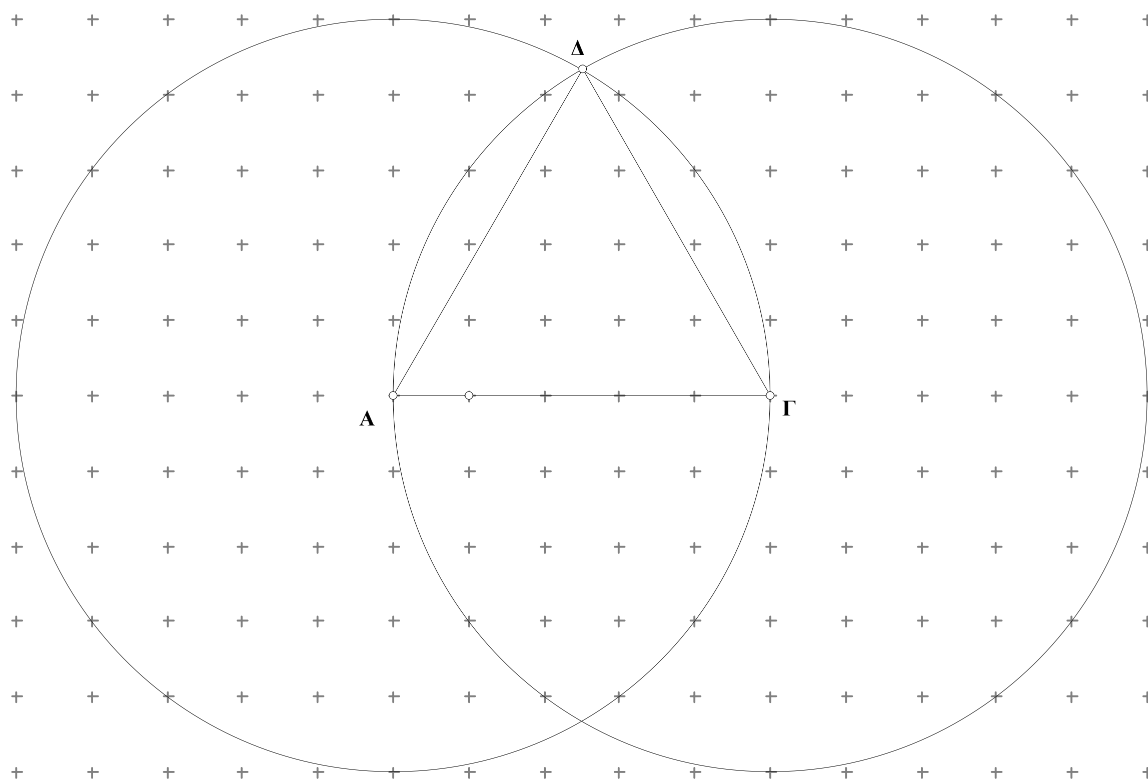


Εργασία $1^η$

Ι. Συστήματα αξιωμάτων για την Ευκλείδεια και τις μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες του επιπέδου και τα μοντέλα (υποδείγματα των τελευταίων)
ΙΙ. Σε μια χώρα υπάρχουν 5 κόμματα : Α (-ριστερά) Σ (-οσιαλιστές) Δ(-ημοκρατικοί) Φ(-φιλελεύθεροι και Ο(-ικολόγοι)
Κατά πόσους τρόπους μπορούν να συμπράξουν προεκλογικώς τα παραπάνω κόμματα, σχηματίζοντας συμμαχίες των δύο κομμάτων;
Θεωρώντας ως σημεία τα κόμματα, και ευθείες τις συμμαχίες, λέμε ότι δύο συμμαχίες είναι παράλληλες, αν δεν έχουν κοινό κόμμα.
Δείξτε ότι: Η γεωμετρία αυτή των πολιτικών συμμαχιών, πληροί το $1^ο$ αξίωμα του Ευκλείδη, αλλά ως προς το $5^ο$ δεν είναι ούτε Ευκλείδια, ούτε Ελλειπτική, ούτε Υπερβολική.
Από την μορφή του $5^{ου}$ αξιώματος που πληροί (ποια;) καλείται ισχυρά Υπερβολική Γεωμετρία.
Να παρασταθεί η Γεωμετρία αυτή στο επιπεδο.
ΙΙΙ. Τι το ……«υπερβολικό» υπάρχει στην υπερβολική Γεωμετρία γενικά; Δηλ. γιατί καλείται έτσι;
Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης
$\chi= \alpha \cosh\theta$, $y=\beta \sinh\theta$
με χρήση «νέων Τεχνολογιών»

Η ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Παραθέτουμε παρακάτω την αυθεντική θεμελίωση της γεωμετρίας από τον ίδιο τον Ευκλείδη , όπως αυτή γίνεται στο πρώτο βιβλίο Ι των «Στοιχείων» του.
Βεβαίως, με τα χρόνια, διαπιστώθηκαν αδυναμίες στην αξιωματική θεμελίωση του Ευκλείδη . Για παράδειγμα, στην Ι.1 πρόταση όπου γίνεται η κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου, δεν διασφαλίζεται ότι υπάρχει η τομή των δύο κύκλων Βεβαίως υπέθεσε ο Ευκλείδης ότι ο κύκλος είναι συνεχής γραμμή , κάτι που δεν μπορεί να θεωρηθεί προφανές.
Το παρακάτω παράδειγμα είναι χαρακτηριστικό:
Αν θεωρήσω τον χώρο Q^2 και επιχειρήσω να κατασκευάσω ισόπλευρο τρίγωνο με την Ευκλείδεια μέθοδο, ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά $\alpha\in Q$, τότε με απλή εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος οι συντεταγμένες της τρίτης κορυφής $(\chi,\psi)\notin Q^2$ αφού $\psi\in$ Ñ\Q



Στα σύγχρονα αξιωματικά συστήματα θεμελίωσης της Γεωμετρίας η τομή των δύο κύκλων εξασφαλίζεται από τα αξιώματα της συνέχειας και του μεταξύ.
Τον 19ο αιώνα ο Pash εισήγαγε (1882) την έννοια του μεταξύ για τρία σημεία. Το σύστημα αυτό βελτιώθηκε (βελτίωση σημαίνει συρίκνωση του αριθμού μη οριζόμενων στοιχείων ή αξιωμάτων) από τον Peano (1889) υπήρξε και το σύστημα του Pieri (1889)
Τον 20ο αιώνα το σύστημα Veblen (1904) που βελτίωνε το του Pash του Forder (1924) , Robinson(1940) Levi (1960)κ.λπ.
Την μεγάλη θέση όμως ανάμεσα σε όλα τα συστήματα , καταλαμβάνουν τα συστήματα των Hilbert-Ευκλείδη (1899) και Birkhoff (1932)
Όμως ο Ευκλείδης παράλληλα με τα 5 αξιώματά του εισήγαγε και ορισμούς εννοιών που δεν ορίζονται αυστηρά μαθηματικά, αλλά τρόπον τινά με διαισθητικούς ορισμούς . Οι ορισμοί αυτοί έγιναν αντικείμενο μελέτης κι ερμηνείας. Κυρίως ο νεοπλατωνικός Πρόκλος εντριφεί στους όρους (ορισμούς) και στα αξιώματα .Τους παραθέτουμε από το πρωτότυπο:

1. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Όροι (Ορισμοί)

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
4. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
5. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

6.Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

7. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

8. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

9. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

10.Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται, ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

11. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

12.Οξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

13.Ὅρος ἐστίν, ὅ τινός ἐστι πέρας.

14. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

15. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον [ἣ καλεῖται περιφέρεια], πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι [πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν] ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

16. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

17. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

18.Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

19.Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

20. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

21.Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

22. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δέ, ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δέ, ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς

ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιονῥ τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.
23.Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπι-πέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.

Η βάση της Γεωμετρίας θεμελιώνεται με τα πέντε αξιώματα-αιτήματα , ξεχωριστή θέση από τα οποία κατέχει το $5^{ο}$ Αυτό, κατέστη επί αιώνες, αντικείμενο απόδειξης από τα υπόλοιπα 4 . Κι όχι μόνο αυτό, αλλά όταν η μαθηματική κοινότητα –πολύ αργά- επείσθη ότι αυτό είναι ανεξάρτητο των άλλων, τότε ακριβώς κατέστη δυνατή η εφαρμογή της ιδέας, του να διαφοροποιηθεί αυτό, δίνοντας άλλες Γεωμετρίες!……

••••••••

1.□□□ήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
2.Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ᾽ εὐ-θείας ἐκβαλεῖν.
3. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γρά-φεσθαι.
4.Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.
5. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ᾽ ἄπειρον συμπί-πτειν, ἐφ᾽ ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

•••••• •••••••

1.Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.
2.Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.
3.Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.
4.Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
(6*).[Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα.
(7*.) Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.
(8*.)Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.]
5.Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον [ἐστιν].

(9*)Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.

Όπως όμως προείπαμε, το αξιωματικό σύστημα βελτιώθηκε ποιοτικά από τον D. Hilbert και είναι πλέον γνωστό με το όρο «Σύστημα των Ευκλείδη- Hilbert»

2. ΣΥΣΤΗΜΑ ΕΥΚΛΕΙΔΗ -HILBERT

Υπάρχουν 5 ομάδες αξιωμάτων:
I. Αξιώματα προσπτώσεως ή συνοχής
II. Αξιώματα διάταξης
III. Αξιώματα ισοδυναμίας
IV. Αξιώματα παραλληλίας
V. Αξιώματα συνέχειας.
Οι μη οριζόμενες έννοιες είναι το σημείο, γραμμή (ευθεία) επίπεδο . Υπάρχουν και μη οριζόμενες σχέσεις, που είναι : κείται επί, είναι εντός, μεταξύ, ισοδύναμα , παράλληλα, συνεχής

- ***I. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΣΤΩΣΕΩΣ Ή ΣΥΝΟΧΗΣ***

1. Από κάθε δύο διάφορα σημεία Α, Β, $\exists$ πάντοτε μία γραμμή α
2. Από κάθε δύο διάφορα σημεία Α, Β, $\exists$ το πολύ μία γραμμή α
3. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία επί μίας γραμμής. Υπάρχουν τουλάχιστον 3 σημεία που δεν κείνται επί μίας γραμμής
4. Από κάθε τρία σημεία Α, Β, Γ, που δεν κείνται επί μίας γραμμής, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο.

- ***II. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΔΙΑΤΑΞΗΣ***

1. Αν το σημείο Β είναι μεταξύ των σημείων Α, Γ, τότε Α, Β, Γ είναι τρία σημεία διάφορα επί της ιδίας ευθείας και το Β είναι επίσης μεταξύ Γ και Α .
2. Για δύο διάφορα σημεία Α, Γ, υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο Β , επί της ΑΓ , έτσι ώστε το Γ , να είναι μεταξύ Α και Β .
3. αν Α, Β, Γ , είναι τρία σημεία διάφορα επί της ιδίας γραμμής, τότε μόνο ένα από τα τρία σημεία είναι μεταξύ των δύο άλλων.
4. (αξίωμα Pasch) έστω Α, Β, Γ , τρία σημεία μη κείμενα επί της ιδίας γραμμής, και έστω m μία γραμμή στο επίπεδο (Α,Β,Γ) η οποία δεν διέρχεται από κανένα από τα Α, Β, Γ. . Τότε , αν η m , διέρχεται από σημείο του τμήματος ΑΒ, θα διέρχεται και από σημείο του τμήματος ΑΓ ή ΒΓ.

- ***III. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ***

1. Αν α, Β , είναι διάφορα σημεία επί της γραμμής m, και Α` είναι ένα σημείο μιας γραμμής m` , τότε υπάρχει ακριβώς ένα σημείο Β` σε κάθε ημιευθεία της m` που προέρχεται από το Α` έτσι ώστε το τμήμα Α`Β` να είναι ισοδύναμο με το ΑΒ : ΑΒ$\cong$Α`Β`
2. τα προς τρίτον ισοδύναμα τμήματα , είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα.
3. αν το Γ μεταξύ των Α και Β και το Γ` μεταξύ των Α` και Β` και αν ΑΓ$\cong$Α`Γ` και ΓΒ$\cong$Γ`Β` , τότε ΑΒ$\cong$Α`Β`
4. αν ΒΑΓ είναι μια γωνία της οποίας οι πλευρές δεν κείνται σε μια γραμμή, και αν σε ένα δοθέν επίπεδο , Α`Β` είναι μια ευθεία προερχομένη από το Α` , τότε υπάρχει ακριβώς μία Α`Γ` προς μία δοθείσα πλευρά της Α`Β` : $\angle$Β`Α`Γ`$\cong$ $\angle$ΒΑΓ .Κάθε γωνία είναι ισοδύναμη με τον εαυτό της
5. αξίωμα (ΠΓΠ) αν δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τριγώνου είναι ισοδύναμες προς τις δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία άλλου τριγώνου, τότε οι υπόλοιπες γωνίες του πρώτου τριγώνου, είναι ισοδύναμες με τις υπόλοιπες γωνίες του δευτέρου τριγώνου.

- ***IV. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ***

1. (Ευκλείδειο αίτημα –Αξίωμα Playfair)

Από δοθέν σημείο εκτός δοθείσης γραμμής, διέρχεται το πολύ μία γραμμή που δεν τέμνει την δοθείσα
(Το αξίωμα αυτό λέγεται και με το δεύτερο όνομα του Playfair διότι αυτός μελέτησε την ισοδυναμία της πρωτότυπης διατύπωσης του Ευκλείδη και της δικής του, η οποία είναι περισσότερο γνωστή στα σύγχρονα σχολικά εγχειρίδια)

- ***V. ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ***

1.(Αξίωμα Αρχιμήδους)
Αν ΑΒ και ΓΔ δύο τυχόντα τμήματα, τότε υπάρχει αριθμός ν , τέτοιος ώστε , αν το τμήμα ΓΔ ληφθεί ν φορές επί της ημιευθείας ΑΒ , αρχίζοντας από το Α, τότε φθάνουμε σε ένα σημείο Ε, όπου ν ΓΔ=ΑΕ και όπου το Β να είναι μεταξύ των Α και Ε .

2. (Αξίωμα Γραμμικής Πληρότητας)
Το σύστημα των σημείων επί μιας γραμμής με την σχέση διάταξης και ισοδυναμίας της, δεν μπορεί να επεκταθεί, έτσι ώστε οι υπάρχουσες σχέσεις μεταξύ των στοιχείων της, καθώς επίσης και οι βασικές ιδιότητες γραμμικής διάταξης και ισοδυναμίας, που προκύπτουν από τα αξιώματα I , III. V.1 να εξακολουθούν να ισχύουν.
Εδώ πρέπει να παρατεθεί η εξής παρατήρηση:
Τα αξιώματα V μπορούν να αντικατασταθούν από το
αξίωμα συνέχειας του Dedekind :
«Για κάθε διαμέριση των σημείων μιας γραμμής σε δύο μη κενά σύνολα , έτσι ώστε κανένα σημείο του ενός συνόλου να κείται μεταξύ των σημείων του άλλου,, υπάρχει σημείο του ενός συνόλου , το οποίο κείται μεταξύ κάθε στοιχείου του ιδίου συνόλου και κάθε στοιχείου του άλλου συνόλου.»

3. ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΟΥ BIRKHOFF

Μη οριζόμενες έννοιες και σχέσεις:

a) σημεία,
b) σύνολα σημείων καλούμενα γραμμές,
c) απόσταση d(A, B) μεταξύ δύο σημείων A, B, ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός με d(A, B) = d(B, A)
d) γωνία AOB τριών διατεταγμένων σημείων A, O, B ($A \neq O$, $B \neq 0$), ένας πραγματικός αριθμός (mod 2π). Το σημείο O καλείται κορυφή της γωνίας.

Αξίωμα I. (του γραμμικού μέτρου) Τα σημεία A, B, ... μιας γραμμής m μπορούν να τεθούν σε μία 1—1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς χ, έτσι ώστε $|\chi_B-\chi_A|$ =d(A,B),για όλα τα σημεία A,B.

Το αξίωμα αυτό καλείται και Αξίωμα της Αναλυτικής Γεωμετρίας, γιατί πράγματι σ' αυτό στηρίζεται ολόκληρη η Αναλυτική Γεωμετρία, αφού οδηγεί στην κατασκευή συστήματος 2 αξόνων και επομένως ζεύγους συντεταγμένων για κάθε σημείο του επιπέδου.

Ορισμοί: Ένα σημείο B είναι μεταξύ των A και C ($A \neq C$) αν d(A,B) +d(B,C) = d(A,C). Τα σημεία A, και C μαζί με όλα τα σημεία B μεταξύ των A και. C σχηματίζουν τμήμα AC. Η ημιευθεία m` με πέρας O ορίζεται από δύο σημεία O, A της γραμμής m` ($A \neq O$), ως το σύνολο όλων των σημείων A` της m, έτσι ώστε το O να μην είναι μεταξύ του Λ και A` . Αν A, B.C είναι τρία διάφορα σημεία, τα τρία Τμήματα AB, BC, CA λέμε ότι σχηματίζουν ένα τρίγωνο ABC με πλευρές AB, BC, CA και κορυφές A, B, C. Αν A, B, C είναι στην ίδια γραμμή, το τρίγωνο ABC καλείται εκφυλισμένο

Αξίωμα ΙΙ. (Αξίωμα σημείου-γραμμής) Μία και μόνο μία γραμμή m περιέχει δύο σημεία P, Q ($P \neq Q$). Αν δύο διάφορες γραμμές δεν έχουν κοινό σημείο είναι παράλληλες Μία γραμμή θεωρείται παράλληλη προς τον εαυτό της.

Αξίωμα ΙΙΙ. (Αξίωμα του μέτρου γωνίας): Οι ημιευθείες m,n, από κάθε σημείο O μπορούν να τεθούν σε μία 1—1 αντιστοιχία με τους πραγματικούς αριθμούς α(mod 2π) έτσι ώστε αν $A \neq O$ και $B \neq O$ είναι σημεία των m και n αντίστοιχα, η διαφορά $\alpha_{\nu}-\alpha_m$ (mod 2π) είναι , <AOB.

Ορισμοί: Δύο ημιευθείες m,n από το O λέμε ότι σχηματίζουν ευθεία (εκτεταμένη) γωνία, αν <mOη = π. Δύο ημιευθείες m, n από το O λέμε ότι σχηματίζουν ορθή γωνία, αν <mOn = ±π /2, οπότε λέμε επίσης σ’ αυτή την περίπτωση ότι n m είναι κάθετη στη n.

Αξίωμα IV. (Αξίωμα ομοιότητας): Αν σε δύο τρίγωνα ABC και A’B’C’ και για μία σταθερά k>0, d(A’,B’) = k d(A,B), d(A’,C’) = kd(A,C) καθώς και τότε επίσης d(B’,C’)=d(B,C) <C’B’A’=± <CBA και <A’C’B’=< ± ACB.

Ορισμοί: Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι όμοια αν υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των δύο σχημάτων έτσι ώστε όλες οι αντίστοιχες αποστάσεις να είναι ανάλογες και οι αντίστοιχες γωνίες να είναι ίσες, ή όλες αντίθετες η μία της άλλης. Δύο γεωμετρικά σχήματα είναι ισοδύναμα, αν είναι όμοια με k =1.

Στο σύστημα αυτό του Birkhoff στηρίχθηκαν τόσο το σύστημα αξιωμάτων SMSG, όσο και το βελτιωμένο σύστημα SMSG .

4. ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ SMSG:

Μή οριζόμενες έννοιες: σημείο, γραμμή, επίπεδο.

Αξίωμα 1: Δοθέντων δύο διαφόρων σημείων, υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που περιέχει και τα δύο.

Αξίωμα 2: (Αξίωμα απόστασης): Σε Κάθε ζεύγος δύο διάφορων σημείων αντιστοιχεί ακριβώς ένας θετικός αριθμός.

Αξίωμα 3: (Αξίωμα του κανόνα): Τα σημεία μιας γραμμής μπορούν ν’ αντιστοιχηθούν στους πραγματικούς αριθμούς, έτσι ώστε:

α) σε κάθε σημείο της γραμμής ν’ αντιστοιχεί ακριβώς ένας πραγματικός αριθμός

β) σε κάθε πραγματικό αριθμό ν’ αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο της γραμμής

γ) η απόσταση μεταξύ δύο σημείων είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αντιστοίχων αριθμών.

Αξίωμα 4: (Αξίωμα τοποθέτησης κανόνα). Δοθέντων δύο σημείων *P* και Q μιας γραμμής, το σύστημα συντεταγμένων μπορεί να εκλεγεί έτσι ώστε η συντεταγμένη του *P* να είναι μηδέν και η συντεταγμένη του Q να είναι θετική.

Αξίωμα 5: α) Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστον τρία μη συγγραμμικά σημεία.

β) Ο χώρος περιέχει τουλάχιστον τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία.

Αξίωμα 6: Αν δύο σημεία κείνται σ’ ένα επίπεδο, τότε η γραμμή που περιέχει αυτά τα σημεία κείται στο ίδιο επίπεδο.

Αξίωμα 7: Κάθε τρία σημεία κείνται σ’ ένα τουλάχιστον επίπεδο και κάθε τρία μη συγγραμμικά σημεία κείνται ακριβώς σ’ ένα επίπεδο. Πιο σύντομα, κάθε τρία σημεία είναι συνεπίπεδα και κάθε τρία μη συγγραμμικά σημεία ορίζουν ένα επίπεδο.

Αξίωμα 8: Αν δύο διάφορα επίπεδα τέμνονται, τότε η τομή τους είναι μία γραμμή.

Αξίωμα 9: (Αξίωμα χωρισμοί επιπέδου). Δοθείσας μιας γραμμής και ενός επιπέδου που την περιέχει, τα σημεία του επιπέδου που δεν κείνται επί της γραμμής σχηματίζουν δύο σύνολα έτσι ώστε

α) καθένα από τα σύνολα να είναι κυρτό

β) αν το P ανήκει στο ένα σύνολο και το Q στο άλλο, τότε το τμήμα PQ τέμνει τη γραμμή.

Αξίωμα 10: (Αξίωμα χωρισμού του χώρου). Τα σημεία του χώρου που δεν κείνται σ' ένα δεδομένο επίπεδο σχηματίζουν δύο σύνολα έτσι ώστε

α) καθένα από τα σύνολα να είναι κυρτό

β) αν το P ανήκει στο ένα σύνολο και το Q στο άλλο, τότε το τμήμα EQ τέμνει το επίπεδο.

Αξίωμα 11: (Αξίωμα μέτρησης γωνίας). Σε κάθε γωνία BAC αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός m μεταξύ 0 και 180.

Αξίωμα 12: (Αξίωμα κατασκευής γωνίας). Έστω $\overrightarrow{AE}$ μία ημιευθεία στην ακμή του ημιεπιπέδου H. Για κάθε αριθμό τ μεταξύ 0 και 180, υπάρχει ακριβώς μία ημιευθεία $\overrightarrow{AP}$ με P στο H, έτσι ώστε m<PAB = τ.

Αξίωμα 13: (Αξίωμα πρόσθεσης γωνιών). Αν D είναι ένα σημείο στο εσωτερικό της <BAC, τότε (για τις γωνίες) mBAC = mBAD + mDAC.

Αξίωμα 14: (Αξίωμα παραπληρώματος). Αν δύο γωνίες σχηματίζουν ένα γραμμικό ζεύγος, τότε είναι παραπληρωματικές.

Αξίωμα 15: (Αξίωμα ΠΓΠ). Δοθείσας μιας αντιστοιχίας μεταξύ δύο τριγώνων(ή μεταξύ ενός τριγώνου και του εαυτού του), εάν δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία του πρώτου τριγώνου είναι ισοδύναμες προς τα αντίστοιχα μέρη του δεύτερου τριγώνου, τότε η αντιστοιχία είναι μία ισοδυναμία.

Αξίωμα 16: (Αξίωμα παραλλήλων). Από ένα δεδομένο εξωτερικό σημείο υπάρχει το πολύ μία γραμμή παράλληλη προς μία δεδομένη γραμμή.

Αξίωμα 17: Σε κάθε πολυγωνικό χωρίο αντιστοιχεί ένας μοναδικός θετικός αριθμός καλούμενος το εμβαδόν.

Αξίωμα 18: Αν δύο τρίγωνα είναι ισοδύναμα, τότε τα τριγωνικά χωρία έχουν Το ίδιο εμβαδόν.

Αξίωμα 19: Έστω ότι το χωρίο R είναι η ένωση δύο χωρίων R_1 και R_2. Ἐστω ότι τα R_1 και R_2 τέμνονται το πολύ σ' ένα πεπερασμένο αριθμό τμημάτων και σημείων. Τότε το εμβαδόν του R είναι το άθροισμα των εμβαδών των R_1 και R_2.

Αξίωμα 20: Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο του μήκους της βάσης του και του μήκους του ύψους του.

Αξίωμα 21: 0 όγκος ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι το γινόμενο του μήκους του ύψους και του εμβαδού της βάσης.

Αξίωμα 22: (Αρχή του Cavalieri) Δοθέντων δύο στερεών και ενός επιπέδου, αν για κάθε επίπεδο που τέμνει τα στερεά και είναι παράλληλο προς το δεδομένο επίπεδο οι δύο τομές έχουν ίσα εμβαδά, τότε τα δύο στερεά έχουν τον ίδιο όγκο.

5. ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ SMSG:

(αφορά την Γεωμετρία του χώρου):

Αξίωμα 1: α) Κάθε γραμμή περιέχει τουλάχιστον δύο διάφορα σημεία.

β) Κάθε επίπεδο περιέχει τουλάχιστον τρία μη συγγραμμικά σημεία.

γ) Ο χώρος περιέχει τουλάχιστον τέσσερα μη συνεπίπεδα σημεία, τα οποία ανά τρία δεν είναι συγγραμμικά.

Αξίωμα 2: Για κάθε δύο διάφορα σημεία στο χώρο, υπάρχει ακριβώς μία γραμμή που περιέχει και τα δύο.

Αξίωμα 3: Για κάθε τρία μη συγγραμμικά σημεία, υπάρχει ακριβώς ένα επίπεδο που τα περιέχει.

Αξίωμα 4: Αν δύο διάφορα σημεία κείνται σ' ένα επίπεδο, τότε η γραμμή που τα περιέχει κείται στο επίπεδο.

Αξίωμα 5: Αν δύο διάφορα επίπεδα έχουν μη κενή τομή, η τομή τους περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία.

Αξίωμα 6: Υπάρχει μία συνάρτηση d από το καρτεσιανό γινόμενο S x S στο R (d:SXS —> R) έτσι ώστε

α)Για κάθε P,Q $\in$ S, d(P,Q) ≥ 0

β) d(P,Q)=0 αν και μόνο αν P=Q

γ) Για κάθε P, Q $\in$ S, d(P, Q) = d(Q, P)

δ) Για κάθε P, Q, D $\in$ S, d(P, D) $\leq$ d(P, Q) + d(Q, D)

Αξίωμα 7: (Αξίωμα κανόνα). Κάθε γραμμή έχει ένα σύστημα συντεταγμένων.

Αξίωμα 8: (Αξίωμα παραλλήλων του Ευκλείδη). Αν P είναι ένα σημείο όχι επί μιας γραμμής r, υπάρχει μία μοναδική γραμμή που περιέχει το P, παράλληλη προς r.

Αξίωμα 9: (Αξίωμα χωρισμού επιπέδου). Αν π είναι ένα επίπεδο και r μία γραμμή στο π, τότε π\ τ είναι η ένωση δύο συνόλων H_1 και H_2 έτσι ώστε

α) τα H_1 και H_2 να είναι κυρτά

β) $H_2 \cap H_2 = \varnothing$

γ)αν $P \in H_1$ και $Q \in H_2$,τότε $r \cap \overline{PQ} \neq \varnothing$.

Αξίωμα 10: (Αξίωμα χωρισμού του χώρου). Δοθέντος ενός επιπέδου α στο χώρο, το σύνολο των σημείων που δεν κείνται στο α είναι η ένωση δύο συνόλωνH_1 και H_2 έτσι ώστε

α) καθένα από τα σύνολα να είναι κυρτό

β) $H_2 \cap H_2 = \varnothing$

γ) κάθε τμήμα που ενώνει ένα σημείο στο ένα σύνολο με ένα σημείο στο άλλο τέμνει το α.

Αξίωμα 11: Υπάρχει μία συνάρτηση m από το σύνολο όλων των γωνιών στους πραγματικούς αριθμούς έτσι ώστε για κάθε γωνία <A, 0<m*A <180.

Αξίωμα 12: (Αξίωμα μοιρογνωμονίου) Έστω AB μία ημιευθεία, H ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την AB και x ένας θετικός αριθμός έτσι ώστε $0 \leq χ \leq 180$. Υπάρχει μία 1—1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου όλων των αριθμών χ και του συνόλου των ημιευθειών AX που κείνται στην ένωση του H και της ακμής του έτσι ώστε

α) η AB ν' αντιστοιχεί στον αριθμό 0.

β) η ημιευθεία AR η αντίθετη της AB ν' αντιστοιχεί στον αριθμό 180

γ) αν X είναι στο εσωτερικό της <BAY και αν x και y είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις AX και AY, αντίστοιχα,
τότε χ <y.

δ) αν X και Y δεν είναι συγγραμμικά με το A και αν χ και y είναι οι αριθμοί που αντιστοιχούν στις AX και AY, αντίστοιχα, τότε m*XAY =|x — y|

Αξίωμα 13: (Αξίωμα ΠΓΠ). Αν σε δύο τρίγωνα υπάρχει μία αντιστοιχία κατά την οποία δύο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία του ενός είναι ισοδύναμες, αντίστοιχα, με τις αντίστοιχες πλευρές και την περιεχόμενη γωνία του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ισοδύναμα.

Αξίωμα 14: (Αξίωμα εμβαδού).

α) σε κάθε πολυγωνικό χωρίο R αντιστοιχεί ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός καλούμενος το εμβαδόν του R και συμβολιζόμενος με α(R).

β) αν R και S είναι ισοδύναμα τρίγωνα, τότε τα τριγωνικά χωρία που ορίζονται από αυτά έχουν ίσα εμβαδά

γ) έστω ότι R και S είναι δύο πολυγωνικά χωρία που είναι ξένα ή έχουν κοινές μόνο ακμές και κορυφές. Τότε $α(R \cup S) = a(R) + a(S)$.

δ) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο του μήκους της βάσης του και του μήκους του ύψους του.

Αξίωμα 15: α) σε κάθε στερεό αντιστοιχεί ένας μοναδικός θετικός πραγματικός αριθμός καλούμενος ο όγκος του.

β) ο όγκος ενός ορθού παραλληλεπιπέδου είναι ίσος προς το γινόμενο των τριών διαστάσεών του.

γ) ο όγκος ενός στερεού είναι το άθροισμα των όγκων του πεπερασμένου αριθμού στερεών χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία από τα οποία αποτελείται.

Αξίωμα 16: (Αρχή του Cavalieri) Αν δύο στερεά μπορούν να βρίσκονται έτσι ώστε οι τομές τους με κάθε επίπεδο παράλληλο προς σταθερό επίπεδο, να είναι ισοδύναμες, τότε τα δύο στερεά είναι ισοδύναμα.

6. ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΙΩΜΑΤΩΝ ΤΟΥ CHOQUET

Ένα επίπεδο είναι ένα σύνολο Π. του οποίου θεωρούμε ένα σύνολο D υποσυνόλων του που καλούνται ευθείες.

•. ••••••• ••••••••••

Αξίωμα Ia: Για κάθε ζεύγος (x, y) διαφόρων σημείων του Η, υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία που περιέχει τα χ και y.

Αξίωμα Ib: Για κάθε ευθεία D και για κάθε σημείο x, διέρχεται από το x μία και μόνο μία παράλληλη ευθεία.

•. ••••••• •••••••

Αξίωμα IIa: Με κάθε ευθεία D συνυπάρχουν δύο δομές ολικής διάταξης, αντίθετες η μία στην άλλη.

Αξίωμα IIb: Για κάθε ζεύγος (A, B) παραλλήλων ευθειών και για όλα τα σημεία a, b, a`,b` τέτοια ώστε a, a' $\in$ A και δ, δ' $\in$ B, κάθε παράλληλη προς αυτές τις ευθείες που συναντά το [a, b], συναντά επίσης το [a', b'].

III. Αξιώματα συσχετισμένης δομής

Αξίωμα ΙΙΙ α: Με το επίπεδο Π, υπάρχει και μία απεικόνιση d του Πx Π στο R_+ καλούμενη απόσταση και τέτοια ώστε:

1. d(y,x)=d(x,y) για όλα τα $\chi,y \in \Pi$
2. Για κάθε προσανατολισμένη ευθεία D, κάθε $\chi \in D$ και κάθε αριθμό $1 \geq 0$ υπάρχει στην D ένα μοναδικό σημείο y τέτοιο ώστε $x \leq y$ και d(x, y) = 1.
3. $\chi \in [\alpha,b] \Rightarrow d(\alpha,\chi)+d(\chi, b) = d(\alpha, b)$

Αξίωμα IIIb: Για κάθε ζεύγος παραλλήλων ευθειών (A,B) Και για όλα τα σημεία a,b,a',b' τέτοια ώστε α,α' $\in$ A και b, b' $\in$ B, η παράλληλη προς τις ευθείες αυτές που διέρχεται από το μέσο του (a, b), διέρχεται επίσης από το μέσο του (α',δ').

IV Αξιώματα μετρικής δομής

Αξίωμα IVa: (καθετότητας) Η καθετότητα (συμβ. $\perp$) είναι μία διμελής σχέση στο σύνολο D των ευθειών του Π τέτοια ώστε

1. $A \perp B \Leftrightarrow B \perp A$
2. $A \perp B$ => A και B δεν είναι παράλληλες.
3. Για κάθε ευθεία A, υπάρχει μία τουλάχιστον ευθεία B, τέτοια ώστε $A \perp B$.
4. Για κάθε ζεύγος (A, B) τέτοιο ώστε $A \perp B$, έχουμε την ισοδυναμία

$$B // B' \Leftrightarrow A \perp B'$$

Αξίωμα IVb: (συμμετρίας) Για κάθε ζεύγος (A_1,A_2) ημιευθειών της ίδιας αρχής O έχουμε

$$C(A_1,A_2)=C(A_2,A_1),$$

όπου: $c(A_1 , A_2)$ συμβολίζει το βαθμωτό k τέτοιο ώστε $\overline{o\phi(\chi)} = \overline{\kappa O\chi}, \forall \chi \in D$, φ είναι η προβολή ορθογώνια στην D_1, Οφ(x) και Ox τα αλγεβρικά μέτρα των(O, ψ(χ)) και

(O, x) και D_1 , D_2 οι προσανατολισμένες ευθείες που περιέχουν τις A_1 και A_2, αντίστοιχα, έτσι ώστε $A_1 \geq 0$, $A_2 \geq 0$. (k είναι ουσιαστικά το συνημίτονο της γωνίας).

Τα αξιώματα αυτά οδηγούν στον ορισμό της norm.[1]

ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η υπερβολική γεωμετρία, οικοδομείται επίσης στην βάση του συστήματος αξιωμάτων Ευκλείδη – Hilbert, όπου όμως το 5^0 αξίωμα του Ευκλείδη, έχει αντικατασταθεί από το υπερβολικό αξίωμα:
΄΄Υπάρχει μια ευθεία ε και ένα σημείο Α εκτός αυτής, έτσι ώστε από το Α να διέρχονται δύο τουλάχιστον παράλληλες προς την ευθεία ε΄΄.
Επιπλέον, αποδεικνύεται ό,τι αν ισχύει το υπερβολικό αξίωμα, τότε ισχύει και το γενικευμένο υπερβολικό αξίωμα:
΄΄Για κάθε σημείο Α εκτός ευθείας ε, υπάρχουν άπειρες ευθείες παράλληλες προς την ε΄΄.
Το κοινό μέρος αξιωμάτων της Ευκλείδειας και της υπερβολικής γεωμετρίας, λέμε ότι αποτελεί την ουδέτερη γεωμετρία.
Ένα μοντέλο για την υλοποίηση της υπερβολικής γεωμετρίας το οποίο οφείλεται στους Liouville, Beltrami και Poincare, είναι το εξής:
Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο εφοδιασμένο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, ορίζουμε:

- υπερβολικό επίπεδο, -συμβολικά ΄΄ Υ-επίπεδο΄΄- το σύνολο των

σημείων {M(x,y) / y >0}.

- Υ-ευθείες, ορίζουμε τις ημιευθείες και τα ημικύκλια, που είναι κάθετα στον άξονα $x'x$ και περιέχονται στο Υ-επίπεδο.
- Υ-σημείο, ορίζουμε κάθε σύνηθες Ευκλείδειο σημείο του Υ-επιπέδου.

Τέλος:

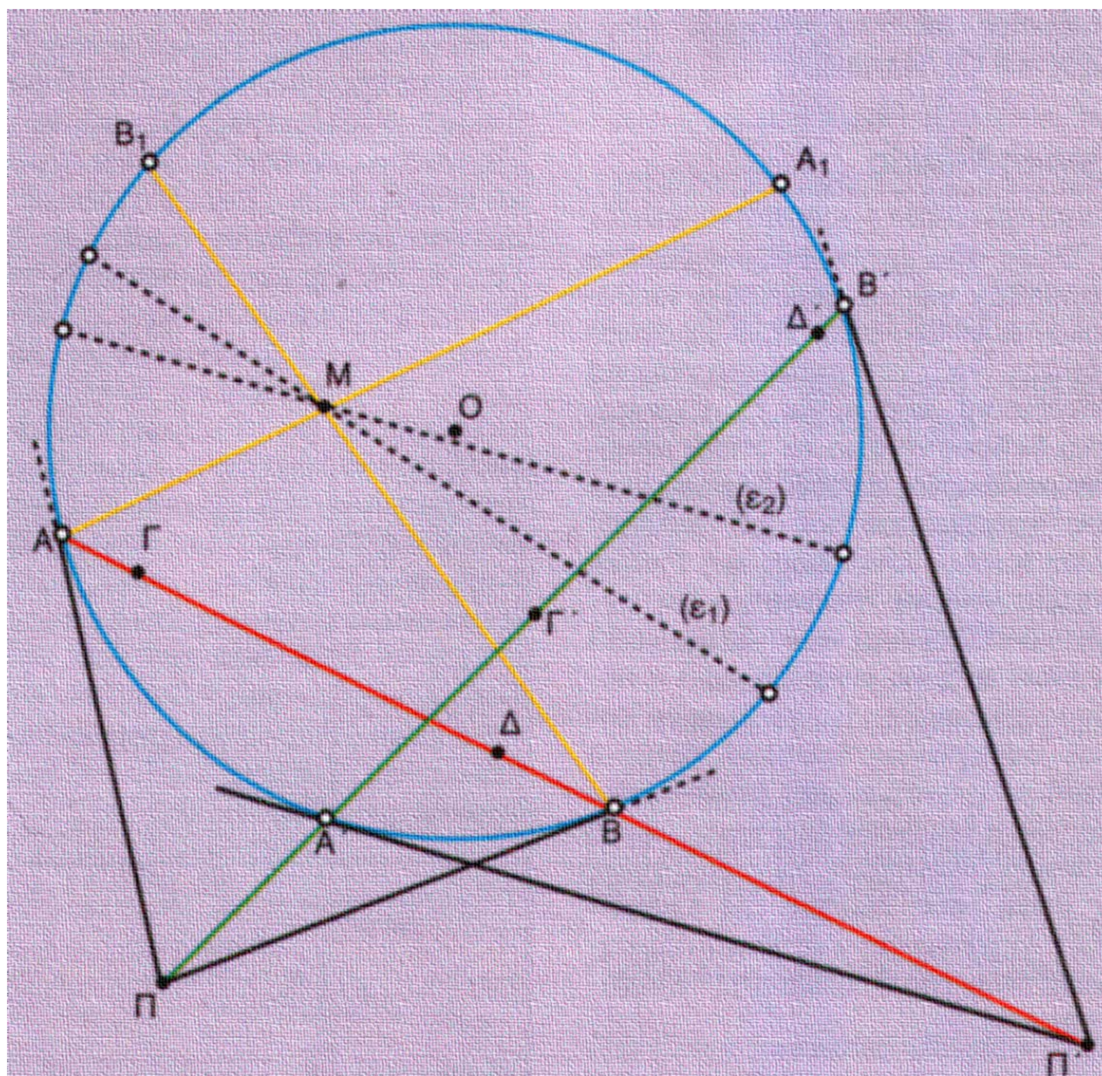
- Παράλληλες λέγονται δύο Υ-ευθείες, οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο.

Πράγματι όπως φαίνεται και από το ακόλουθο σχήμα:
Από το σημείο Α που δεν ανήκει στην Υ-ευθεία $ε_1$, διέρχονται τρεις Υ-ευθείες παράλληλες προς την $ε_1$.

Ένα δεύτερο μοντέλο της υπερβολικής γεωμετρίας (το οποίο οφείλεται στον Klein), είναι το εξής:

ΠΡΟΤΥΠΟ KLEIN

[1] **Ο Ι. Αραχωβίτης προτείνει τον όρο** μέγεθος **από το énorme που σημαίνει υπερμεγέθης. Έτσι, ο χώρος με norm θα καλείται** μεγεθικός χώρος) **καθώς και του** εσωτερικού γινομένου.



Σε ένα Ευκλείδειο επίπεδο, θεωρούμε κύκλο (O,R).Τότε ως:

- Υπερβολικό επίπεδο, θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία του κύκλου.
- Υπερβολικές ευθείες, θεωρούμε τις χορδές του κύκλου χωρίς τα άκρα τους
- Υπερβολικό σημείο, θεωρούμε κάθε σύνηθες Ευκλείδειο σημείο του υπερβολικού επιπέδου.
- Παράλληλες λέγονται δύο ευθείες, οι οποίες δεν έχουν κοινό σημείο.

Και στο μοντέλο αυτό, μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύουν τα αξιώματα της ουδέτερης γεωμετρίας και επιπλέον ισχύει το υπερβολικό αξίωμα.

Πράγματι όπως προκύπτει από το παραπάνω σχήμα, από το σημείο Μ που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ, διέρχονται δύο υπερβολικές ευθείες ε_2 και ε_1 οι οποίες είναι παράλληλες προς την ΑΒ

Ένα πράγμα που έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον , είναι στο κατά πόσον οι «ευθείες» του μοντέλου αυτού είναι άπειρα επεκτεινόμενες. Αυτό πραγματοποιείται μέσω μιας ιδιότυπης μετρικής , της

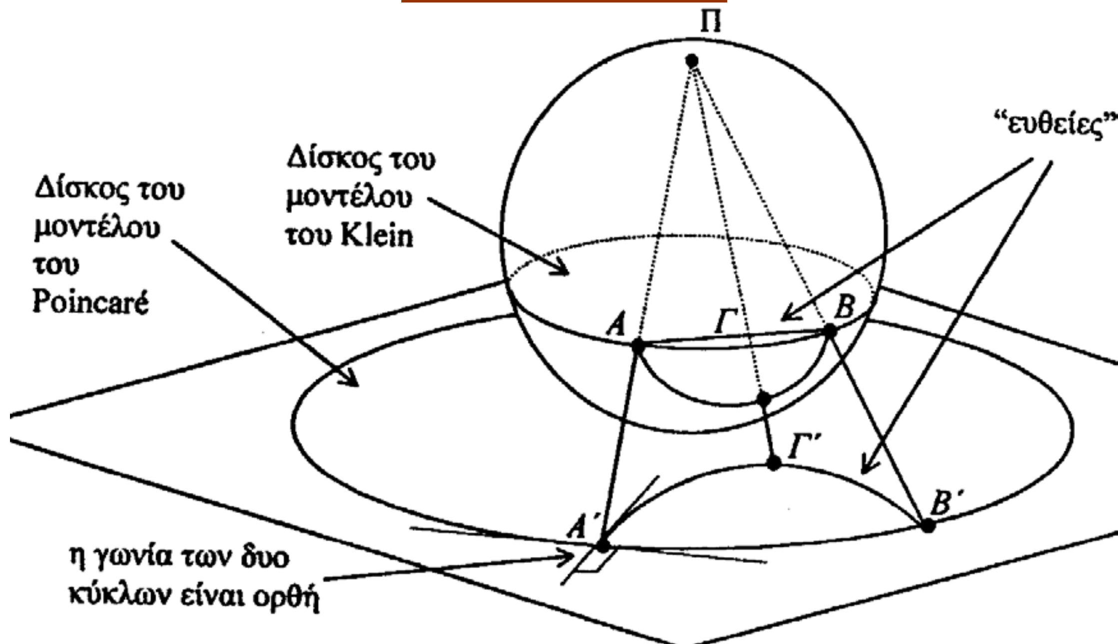
$D(\Gamma, \Delta)=\lambda^*|\ln(\Gamma\Delta, AB)|=\lambda\left|\ln\frac{\Gamma A * \Delta B}{\Gamma B * \Delta A}\right|, \lambda>0$ (1)

όπου έχω πάρει τους διπλούς λόγους τεσσάρων σημείων (συζυγή αρμονικά)

Από τον τύπο (1) προκύπτει, ότι όταν Γ→Α , τότε στον (1) τα υπόλοιπα μήκη θα είναι θετικά , το μήκος του ΓΑ θα τείνει στο 0 και ο λογάριθμος του αριθμητικού λόγου στο $-\infty$, η απόσταση στο $+\infty$.

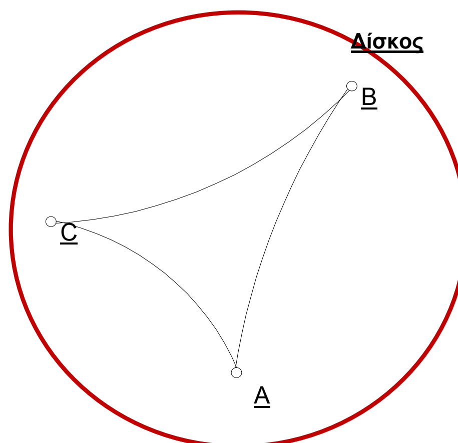
Έτσι υλοποιείται και απαίτηση για «άπειρες» ευθείες!
Με χρήση του παραπάνω προτύπου , μπορεί να υλοποιηθεί η υπερβολική Γεωμετρία και σε ένα άλλο πρότυπο , του Poincore ,, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

ΠΡΟΤΥΠΟ POINCARE



Εικόνα 1Στο πρότυπο του Klein , κάνουμε στερογραφική προβολή. Η στερεογραφική προβολή , διατηρεί το επίπεδο Α,Β,Γ και τις γωνίες. Έτσι, όπως φαίνεται και από το σχήμα, έχουμε πάλι ως «επίπεδο» έναν ανοικτό δίσκο και ως «ευθείες» τις προβολές των ευθειών του δίσκου του Klein , οι οποίες θα είναι είτε διάμετροι του κύκλου, είτε τόξα, κάθετα στον κύκλο. Και σε αυτό το πρότυπο , έχουμε περισσότερες παράλληλες από ένα σημείο εκτός ευθείας προς ευθεία , ενώ έχουμε και «οριακές παραλλήλους!»

Ο δίσκος του Πουανκαρέ αποτελεί μοντέλο για την υπερβολική γεωμετρία. Στο μοντέλο αυτό, μια ευθεία γραμμή που περνά από δύο σημεία, ορίζεται ως τόξο που περνά από τα δύο σημεία και είναι κάθετο στον κύκλο.



Εικόνα 2. Ένα υπερβολικό τρίγωνο πάνω στο πρότυπο του Poincare

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η ελλειπτική γεωμετρία (η οποία σχετίζεται με την σφαιρική γεωμετρία), θεμελιώνεται με την βοήθεια των εξής αξιωμάτων:

I. Αξιώματα της ΄΄σύμπτωσης΄΄

I_1: Για οποιαδήποτε σημεία Α και Β, δεν υπάρχει παραπάνω από μια ευθεία που τα περιέχει.

I_2: Κάθε ευθεία, περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Υπάρχουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

I_3: Για κάθε τριάδα μη συνευθειακών σημείων, υπάρχει πάντοτε επίπεδο που τα περιέχει. Κάθε επίπεδο περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο.

I_4: Για κάθε τριάδα μη συνευθειακών σημείων, υπάρχει το πολύ ένα επίπεδο που τα περιέχει.

I_5: Αν δύο σημεία Α, Β μιας ευθείας ανήκουν στο επίπεδο α, τότε και όλη η ευθεία που ορίζεται από τα Α και Β περιέχεται στο επίπεδο α.

I_6: Δύο επίπεδα α, β που έχουν κοινό σημείο Α, έχουν ένα τουλάχιστον επιπλέον κοινό σημείο Β.

I_7: Υπάρχουν τέσσερα τουλάχιστον σημεία, μη κείμενα στο ίδιο επίπεδο.

Στο σημείο αυτό οφείλουμε να αναφέρουμε τα εξής:

Ενώ από τα αξιώματα της σύμπτωσης της ελλειπτικής γεωμετρίας παραλείπεται το αξίωμα ΄΄Για κάθε δύο σημεία υπάρχει ακριβώς μια ευθεία που τα περιέχει΄΄, (αφού από δύο αντιδιαμετρικά σημεία στην επιφάνεια μιας σφαίρας διέρχονται άπειροι μέγιστοι κύκλοι), ο F. Klein θεωρώντας ως σημείο στην επιφάνεια μιας σφαίρας ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων, εμπλούτισε τα αξιώματα της σύμπτωσης και με το παραπάνω αξίωμα.

II.Αξιώματα χωρισμού

Στην ελλειπτική γεωμετρία, δεν ισχύουν τα αξιώματα της διάταξης της ουδέτερης γεωμετρίας, αλλά μια ομάδα ΄΄αξιωμάτων χωρισμού΄΄.

Συγκεκριμένα, αν Α, Β, Γ, Δ είναι διακεκριμένα συνευθειακά σημεία, με το σύμβολο (Α, Β / Γ, Δ) εννοούμε ότι τα σημεία Α, Β ΄΄χωρίζουν΄΄ τα σημεία Γ,Δ, όπου η έννοια του χωρισμού, ορίζεται από τα εξής αξιώματα:

II_1: Αν (Α, Β / Γ, Δ) τότε (Γ, Δ /Α, Β) και (Β, Α / Γ, Δ)

II_2: Αν (Α, Β / Γ, Δ) τότε δεν ισχύει (Α, Γ / Β, Δ)

II_3: Αν τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι διακεκριμένα και συνευθειακά, τότε ισχύει (Α, Β / Γ, Δ) ή (Α, Γ / Β, Δ) ή (Α, Δ / Γ, Δ)

II_4: Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και διακεκριμένα, τότε υπάρχει ένα σημείο Δ, τέτοιο ώστε (Α, Β / Γ, Δ)

II_5: Για οποιαδήποτε 5 διακεκριμένα συνευθειακά σημεία Α,Β, Γ, Δ, Ε, αν ισχύει (Α, Β / Δ, Ε), τότε (Α, Β / Γ, Δ) ή (Α, Β / Γ, Δ)

Στο σημείο αυτό, εισάγουμε την έννοια της ΄΄προοπτικής΄΄, η οποία είναι προαπαιτούμενη για το επόμενο αξίωμα χωρισμού.

Έστω $ε_1$ και $ε_2$ δύο τυχαίες ευθείες και Α ένα σημείο που δεν ανήκει στις $ε_1$ και $ε_2$. Αν Β είναι τυχαίο σημείο της $ε_1$, τότε η ευθεία ΑΒ τέμνει την $ε_2$ σε ένα μοναδικό σημείο Γ.

Η παραπάνω διαδικασία, ορίζει μια ΄΄1-1΄΄ απεικόνιση των σημείων της $ε_1$ στην $ε_2$. Η απεικόνιση αυτή, λέγεται ΄΄προοπτική με κέντρο το Α, από την $ε_1$ στην $ε_2$΄΄ .Τότε ισχύει και το ακόλουθο αξίωμα χωρισμού:

II_6: Αν $ε_1$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από τα διακεκριμένα σημεία $Α,Β,Γ,Δ$ όπου $(Α,Β/Γ,Δ)$ και $Α',Β',Γ',Δ'$ οι εικόνες των $Α,Β,Γ,Δ$ αντίστοιχα σε μια ευθεία $ε_2$ μέσω μιας προοπτικής, τότε ισχύει ότι $(Α',Β'/Γ',Δ')$.

III.Αξιώματα συμφωνίας

Επιπλέον, ισχύουν για την ελλειπτική γεωμετρία, τα ΄΄αξιώματα συμφωνίας΄΄ της ουδέτερης γεωμετρίας:

III_1: Αν $Α,Β$ είναι σημεία μιας ευθείας $ε_1$ και $Α'$ είναι σημείο της ευθείας $ε_2$, τότε σε κάθε ημιευθεία $Α\chi$ της $ε_1$, υπάρχει σημείο $Β'$, τέτοιο ώστε $ΑΒ = Α'Β'$.

III_2: Δύο ευθύγραμμα τμήματα ίσα προς τρίτο, είναι και μεταξύ τους ίσα.

III_3: Έστω ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΒ,ΒΓ$ της ίδιας ευθείας ε, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το $Β$. Έστω επίσης ότι τα τμήματα $Α'Β',Β'Γ'$ της ίδιας ή μιας άλλης ευθείας $ε_1$, έχουν μόνο ένα κοινό σημείο το $Β'$. Αν $ΑΒ = Α'Β'$ και $ΒΓ = Β'Γ'$, τότε και $ΑΓ = Α'Γ'$.

III_4: Έστω γωνία $\angle(\eta,\theta)$ του επιπέδου ε και μια ημιευθεία η' από το σημείο Ο του ίδιου ή διαφορετικού επιπέδου. Τότε υπάρχει μια μόνο ημιευθεία θ σε κάθε ημιεπίπεδο εκατέρωθεν της η', έτσι ώστε $\angle(\eta,\theta) = \angle(\eta',\theta')$.Κάθε γωνία είναι ίση με τον εαυτό της.

III_5: Αν για δύο τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ ισχύουν $ΑΒ = Α'Β'$, $ΑΓ = Α'Γ'$, $\angle ΒΑΓ = \angle Β'Α'Γ'$, τότε ισχύει ότι $\angle ΑΒΓ = \angle Α'Β'Γ'$.

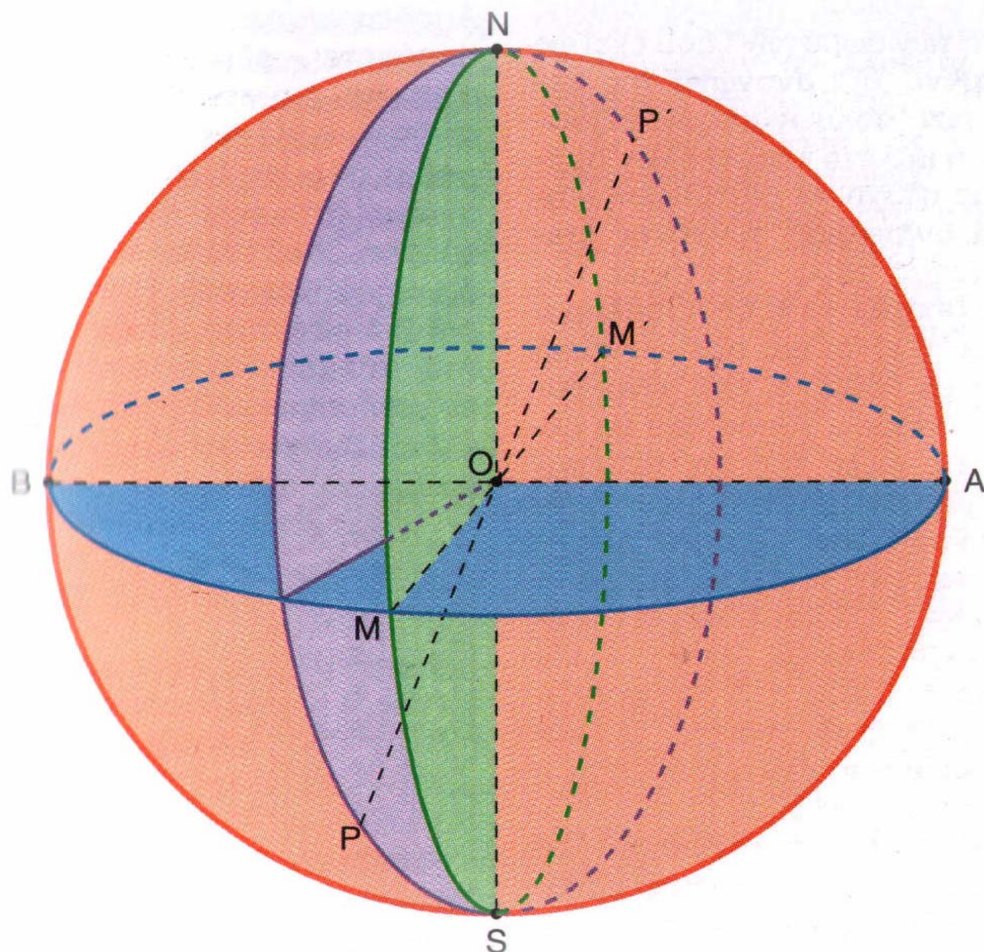
IV.Καθώς και το ΄΄ελλειπτικό αξίωμα΄΄:

Δεν υπάρχουν δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

Με την βοήθεια των παραπάνω αξιωμάτων, ένα μοντέλο υλοποίησης της ελλειπτικής γεωμετρίας είναι το εξής:

- Ελλειπτικό επίπεδο, ορίζουμε την επιφάνεια μιας σφαίρας.
- Ελλειπτικό σημείο, ορίζουμε ένα ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων πάνω στο ελλειπτικό επίπεδο.
- Ελλειπτική ευθεία, ορίζουμε τον μέγιστο κύκλο της σφαίρας που διέρχεται από δύο διακεκριμένα ελλειπτικά σημεία.

Πιο συγκεκριμένα, έχω το παρακάτω σχήμα , στο οποίο:



- Ελ-επίπεδο είναι η επιφάνεια της σφαίρας Ο
- Ελ-σημείο είναι κάθε ζεύγος αντιδιαμετρικών σημείων της Ο
- Ελ-ευθεία είναι κάθε μέγιστος κύκλος του Ο

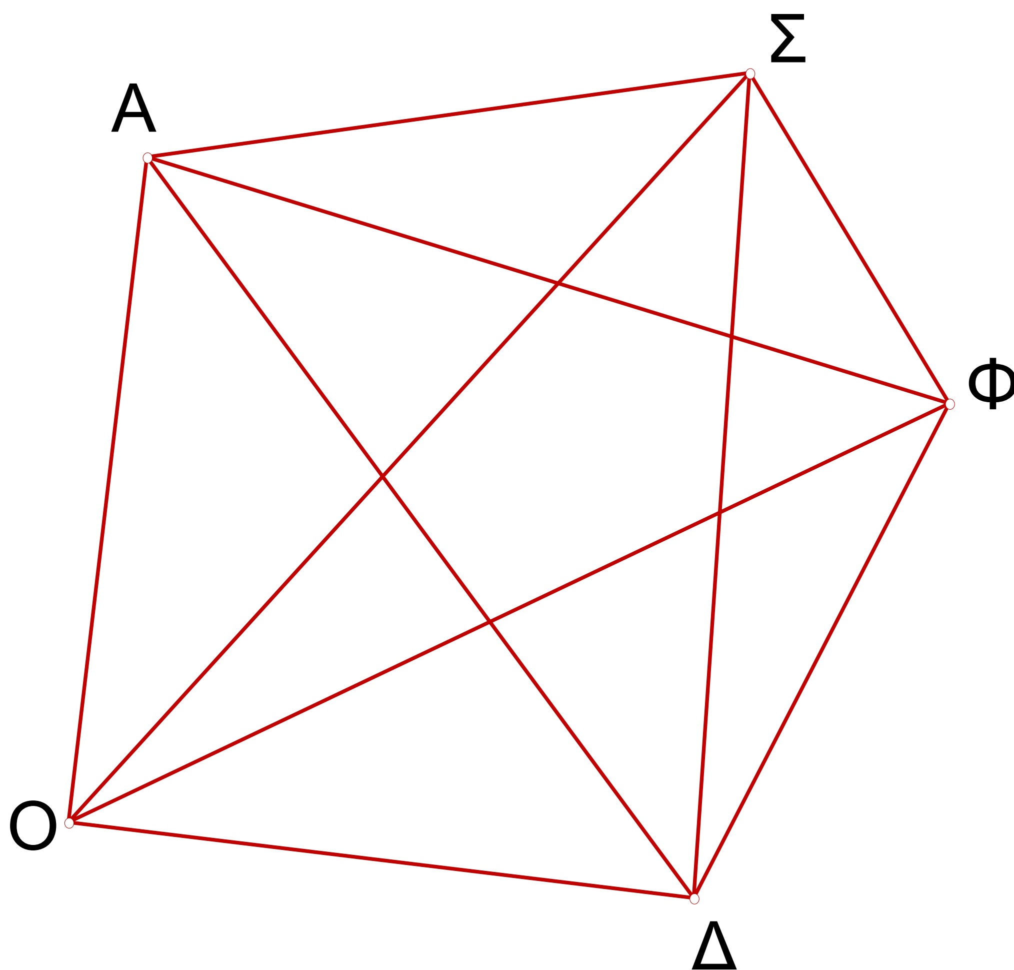
Το ζεύγος (Ν, S) καθώς και το ζεύγος (Α,Β) είναι Ελ-σημεία. Τα δύο αυτά σημεία, ορίζουν την ελ-ευθεία (N, S) (A, B) , δηλαδή τον μέγιστο κύκλο ANBS της σφαίρας Ο

Απόσταση δύο ελ- σημείων ορίζεται ως το πιο μικρό τόξο από τα δύο τόξα που ορίζουν τα δύο ελ- σημεία.. έτσι η μέγιστη δυνατή απόσταση δυο ελ-σημείων είναι π/2 , αν θέσω την ακτίνα του κύκλου ίση με την μονάδα.

Επί παραδείγματι, στο σχήμα έχω τα δύο σημεία (Μ,Μ') , (P,P') . Το πιο μικρό από τα τόξα με άκρα τα σημεία M, P, του μέγιστου κύκλου που ορίζεται από τα σημεία αυτά.

Με κάποιο τρόπο αποδεικνύεται ακόμη (Με σφαιρική Γεωμετρία) ότι το άθροισμα των γωνιών ενός ελ-τριγώνου είναι πάνω από 180^o .

Το παραπάνω πρότυπο ελλειπτικής Γεωμετρίας του επιπέδου που υλοποιείται στην σφαίρα, είναι η ομάδα των μετασχηματισμών που αφήνει αναλλοίωτα τα μήκη και τις γωνίες , είναι η ομάδα των στροφών της σφαίρας περί το κέντρο της .
Σήμερα είναι πλήρως διαμορφωμένη η ν-διάστατη ελλειπτική Γεωμετρία του Riemann ($v \geq 2$) .
Με την εργασία του ο Riemann, το 1854, έθεσε τις βάσεις για την θεμελίωση ολόκληρης κλάσης Γεωμετριών που έκτοτε φέρουν το όνομά του (Ρημάννειες)



ΙΙ. Επειδή κάθε κόμμα μπορεί να σχηματίσει πολιτική συμμαχία με κάθε άλλο από τα υπόλοιπα , μεταφραζόμενο αυτό σε γεωμετρική γλώσσα, σημαίνει ότι «από κάθε σημείο, άγεται προς κάθε άλλο μία ευθεία» Δηλ. ισχύει το $1^{ο}$ αξίωμα του Ευκλείδη.

Η Γεωμετρία αυτή είναι πεπερασμένη , αφού έχει 5 σημεία και $\binom{5}{2}$=10 ευθείες.

- Η γεωμετρία αυτή δεν μπορεί να είναι Ελλειπτική, διότι αν ήταν, δεν θα υπήρχαν ευθείες παράλληλες μεταξύ τους. Όμως , σύμφωνα με τον ορισμό της, υπάρχουν λ.χ. οι ευθείες ΑΣ και ΦΟ που εξ ορισμού είναι παράλληλες.
- Δεν είναι υπερβολική, διότι με το πεπερασμένο των ευθειών δεν είναι δυνατόν να εκπληρούται ο όρος των απείρων παραλλήλων από ένα σημείο προς ευθεία.
- Επίσης η Γεωμετρία αυτή δεν είναι Ευκλείδεια, διότι θα έπρεπε να ισχύει το $5^{ο}$ αίτημα , πράγμα που δεν είναι αληθές, καθ' όσον υπάρχει σημείο , λ.χ. το Α και ευθεία λ.χ. η ΔΦ από το οποίο άγονται δύο διαφορετικές παράλληλες προς αυτήν, λ.χ. οι ΑΣ και ΑΟ. Αυτές οι ευθείες είναι διαφορετικές, διότι αν συνέπιπταν, τότε $ΑΣ \equiv ΑΟ \Leftrightarrow Σ \equiv Ο$άτοπο!

Η μορφή του 5ου αξιώματος που εκπληρούται, μας επιτρέπει να κατατάξουμε την παρούσα γεωμετρία στην ισχυρά Υπερβολική Γεωμετρία , αφού από κάθε σημείο , προς πάσαν άλλην ευθεία που δεν ανήκει σ' αυτή , άγονται ακριβώς δύο παράλληλες

Απόδειξη: Έστω τα σημεία X, Y , Z που ανήκουν στο G={A, Σ, Φ, Δ, O} με $X\neq Y\neq Z\neq X$. έχω την ευθεία XY και το σημείο Z εκτός αυτής . Τότε επειδή υπάρχουν άλλα δύο ακριβώς διαφορετικά σημεία από τα X,Y, Z , (έστω τα K,Λ $\in G$) τότε θα ορίζονται ακριβώς δύο διαφορετικές παράλληλες προς την XY που θα διέρχονται από το Z , οι ZK και ZΛ .
Αυτό συμβαίνει για κάθε σημείο εκτός ευθείας , άρα ομιλώ για ισχυρά Υπερβολική Γεωμετρία

<u>III. Το «υπερβολικόν» της ……Υπερβολικής Γεωμετρίας</u>

Έχομε:

- Στην Ευκλείδειο την ύπαρξη μίας και μόνης παραλλήλου από σημείου εκτός αυτής και προς αυτήν.
- Στην Ελλειπτική την απουσία παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας και προς αυτήν.
- Στην Υπερβολική την ύπαρξη απείρων διαφορετικών παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας και προς αυτήν.

Επομένως ως πρακτικό κανόνα μνημονικό διάκρισης των Γεωμετριών θα μπορούσαμε να θεσπίσουμε *την αντιστοίχιση της ετυμολογικής καταγωγής της λέξης που χαρακτηρίζει την Γεωμετρία με την ύπαρξη , απουσία ή πληθώρα παραλλήλων από σημείο εκτός ευθείας και προς αυτήν!*

Γραφική παράσταση του συνόλου με παραμετρικές εξισώσεις

$$\chi = \alpha \cosh\theta \quad \text{και}\ \psi = \beta \sinh\theta \ \ (1)$$

Με αντικατάσταση των εξ ορισμού ίσων προς το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο, έχομε:

$$\chi = \alpha \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \qquad \text{και}\ \psi = \beta \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \quad (2)$$

Η (2) μπορεί να ειδωθεί και ως σύστημα δύο εξισώσεων , από τα οποίες μπορεί να γίνει απαλοιφή του e^{x} και e^{-x}, ως εξής:

$$\chi^2=\left(\alpha\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 \quad \text{και } \psi^2=\left(\beta\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\chi^2=\alpha^2\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^xe^{-x}}{4} \text{ και } \psi^2=\beta^2\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2e^xe^{-x}}{4}\Rightarrow$$

$$\chi^2=\alpha^2\frac{e^{2x}+e^{-2x}+2e^0}{4} \text{ και } \psi^2=\beta^2\frac{e^{2x}+e^{-2x}-2e^0}{4}\Rightarrow$$

$$\chi^2=\alpha^2\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}+\frac{1}{2}\right) \text{ και } \psi^2=\beta^2\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2}=\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}+\frac{1}{2}\right) \text{ και} \frac{\psi^2}{\beta^2}=\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow(\alpha\phi\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\acute{\epsilon}\lambda\eta)$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\chi^2}{\alpha^2}-\frac{\psi^2}{\beta^2}=1 \quad \text{η οπάια είναι}$$

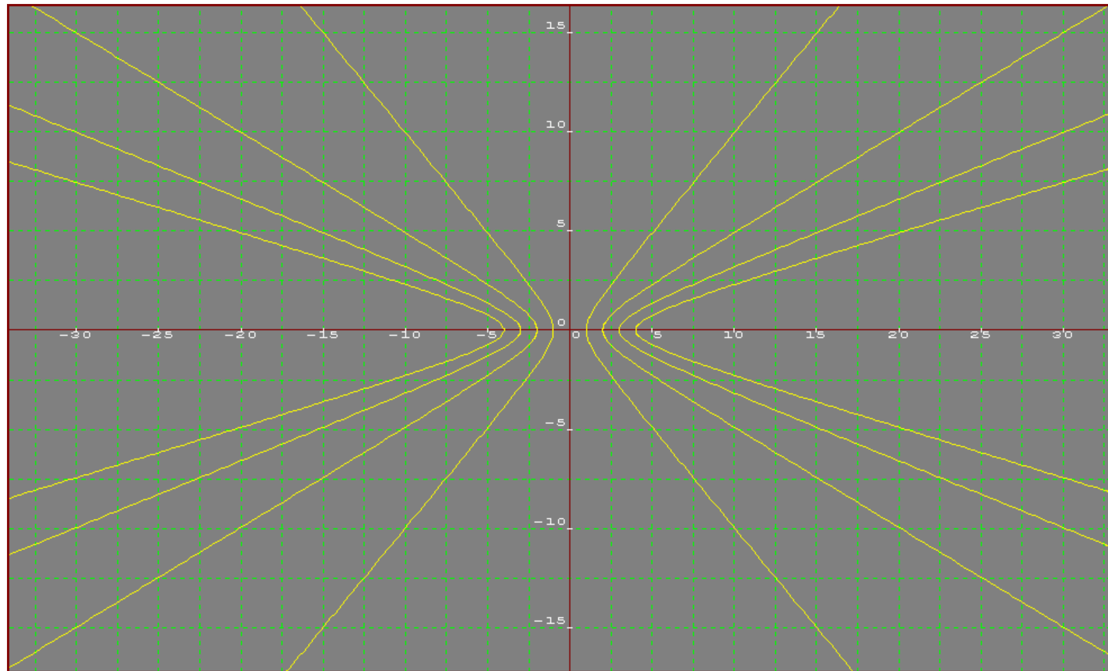
εξίσωση υπερβολής

επίσης από τις (2) , θέτοντας $e^x=t>0\Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{t}>0$ και εξ αυτού έχω μια άλλη παραμετρική μορφή της παραβολής , την

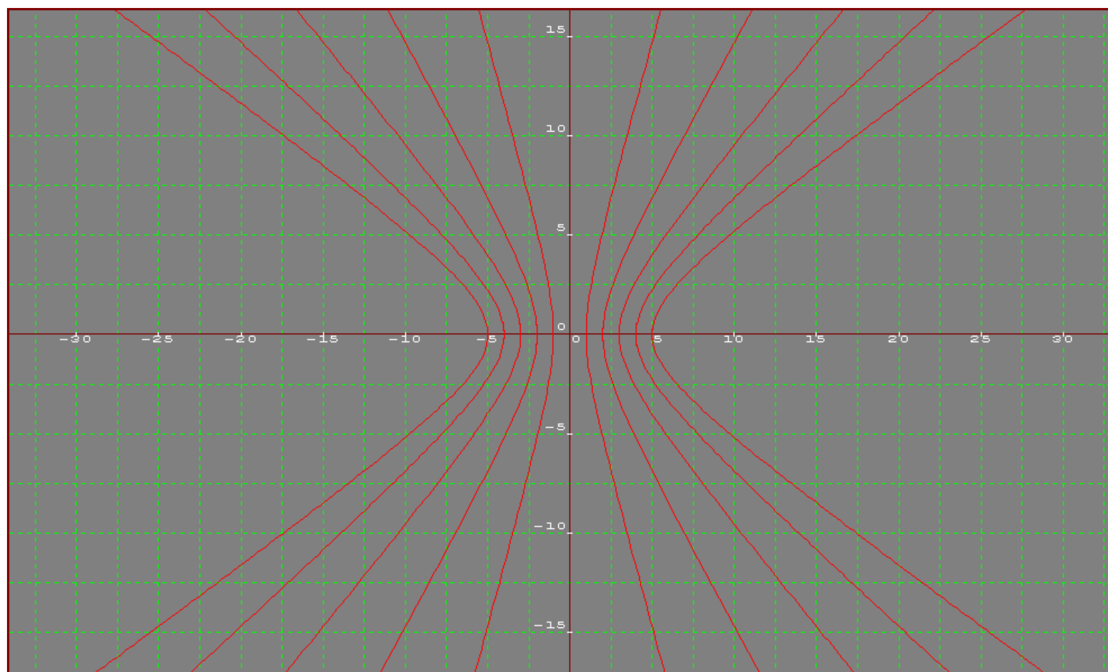
$$\chi=\alpha\frac{t+\frac{1}{t}}{2} \quad \text{και } \psi=\beta\frac{t-\frac{1}{t}}{2}\Rightarrow$$

$$\chi=\frac{\alpha}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\text{και } \psi=\frac{\beta}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \qquad (3)$$

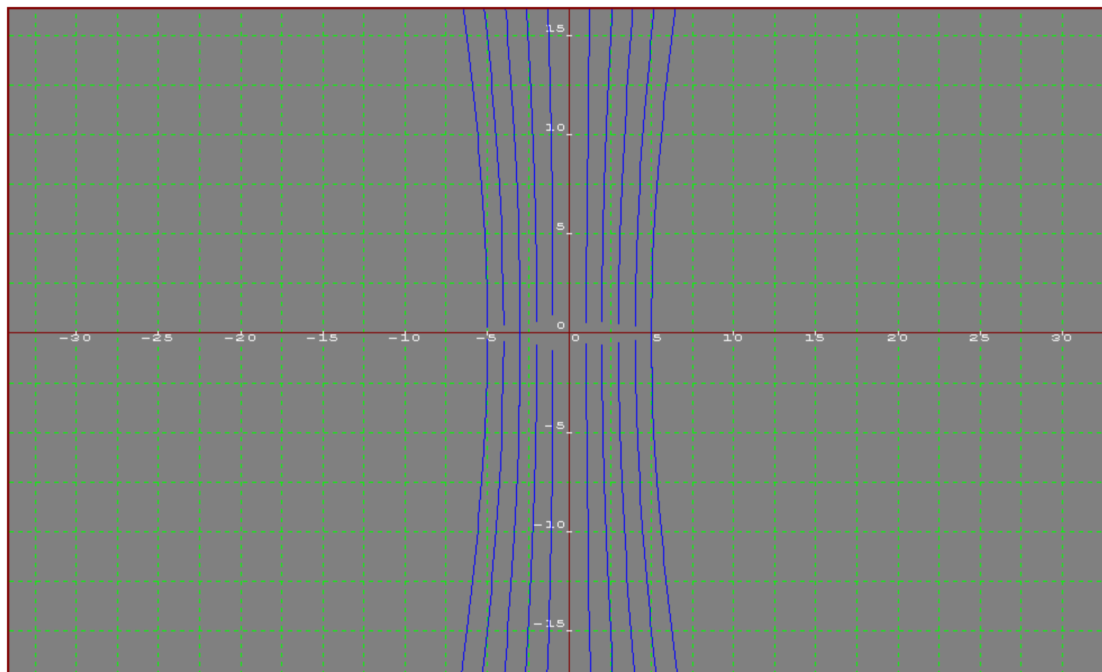
Επίσης με χρήση του προγράμματος Graphmath , λαμβάνω τα παρακάτω:



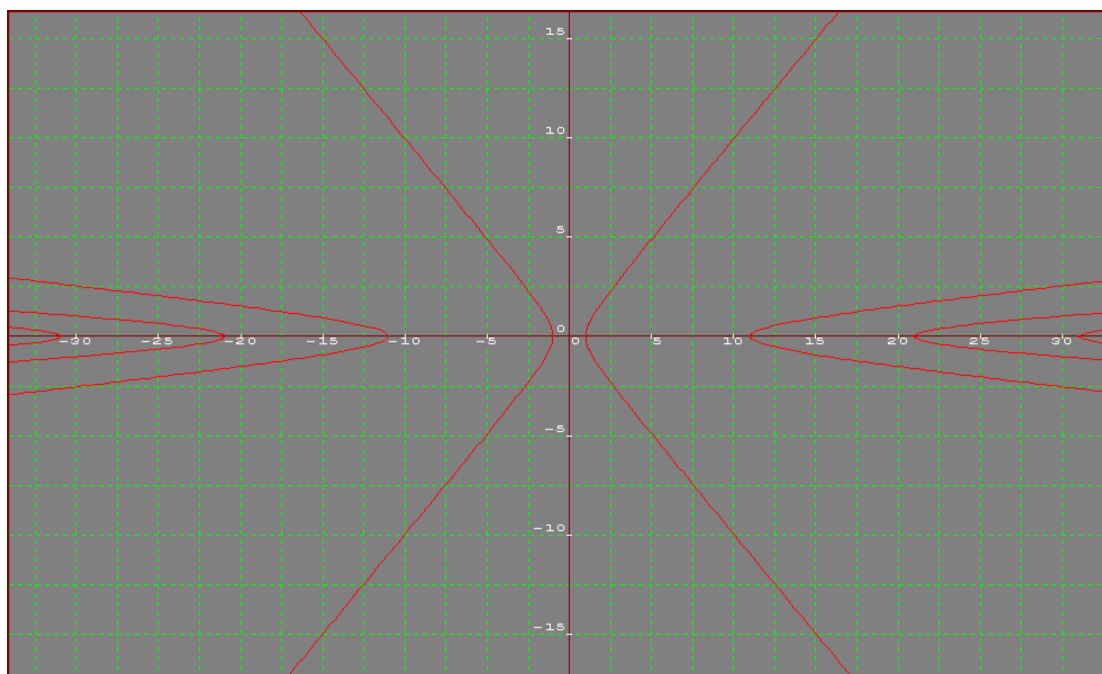
Η σχεδίαση της οικογένειας καμπυλών $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ για β=1 (και για α=1 και με βήμα 1 έως 5)



Η σχεδίαση της ίδιας οικογένειας καμπυλών $\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$, αλλά για β=3



Η ίδια οικογένεια των πέντε υπερβολών για β =20



άλλες τέσσερις υπερβολές , με β=1 , αλλά από α=1 με βήμα 10 έως 40

Θεματική ενότητα συνεδρίου:	**3η.** Διδακτική μεθοδολογία. Αναλυτικά προγράμματα, σχολικά εγχειρίδια, διδακτικά αντικείμενα, αξιολόγηση (Συγγραφή / σύνθεση διδακτικού σεναρίου)
Κατηγορία εργασίας: *Εισήγηση*	

Σενάριο για την διδασκαλία της σχέσης επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας, καθώς και της σχέσης εγγεγραμμένης γωνίας και υπό χορδής και εφαπτομένης.

Γιάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός –Οικονομολόγος , Διευθυντής Δ.Ε. Μεσσηνίας, Επιμορφωτής Β΄επιπέδου , ΜΔΕ «διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Ηλ.ταχ.: plataros@gmail.com

Περίληψη

Το παρόν σενάριο αφορά το 6ο Κεφάλαιο Γεωμετρία του ισχύοντος Σχολικού εγχειριδίου και αφορά την διδασκαλία εγγεγραμμένων και επικέντρων γωνιών την μεταξύ του σχέση, όπως και την σχέση εγγεγραμμένης και υπό χορδής και εφαπτομένης. Το αξιοσημείωτο είναι η προσέγγιση με δυναμικό Γεωμετρικό λογισμικό (Sketchpad) πράγμα που δίνει την δυνατότητα να διερευνηθούν σε ένα περιβάλλον καθοδηγούμενης ανακαλυπτικής μάθησης ότι η γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης είναι οριακή θέση εγγεγραμμένης και να διασαφηνιστεί για το μέλλον η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης, καθώς και η ολιστική ματιά της εγγεγραμμένης ως γεωμετρικού τόπου.

Λέξεις κλειδιά

Εγγεγραμμένη γωνία , επίκεντρη γωνία, εφαπτομένη, γεωμετρικός τόπος, ολιστική οπτική, ανακαλυπτική μάθηση, Sketchpad, δυναμικό Γεωμετρικό λογισμικό.

Γνωστικό Αντικείμενο και περιοχή

Γεωμετρία Α΄ Λυκείου, κεφάλαιο 6 διδακτικού εγχειριδίου, § 1,2,3 και 4. Ένα φύλλο εργασίας για 2 διδακτικές ώρες.

Οργάνωση διδασκαλίας υλικοτεχνική υποδομή

Η διδασκαλία πρέπει να διεξαχθεί στην αίθουσα Η/Υ όπου οι μαθητές μπορούν να λειτουργήσουν και ως ομάδες τριών προσώπων. Χρειάζεται εξοικείωση με το λογισμικό. Σε κάθε περίπτωση, στο φύλλο εργασίας παρέχονται και οι οδηγίες του λογισμικού , δηλ. του sketchpad 4.07 (Ελληνική έκδοση για το ΥΠΑΙΘ). Ο Καθηγητής, θα έχει διαδραστικό πίνακα ή θα προβάλλει την επιφάνεια εργασίας του δικού του Η/Υ όπως θα έχουν και οι μαθητές. Στην αρχή μοιράζονται στους μαθητές τα φύλλα εργασίας ανά τρεις και καθηγητής

περιέρχεται τις ομάδες, ενισχύει, υποδεικνύει χωρίς να αποκαλύπτει, εμπνέει, καθοδηγεί, οιονεί προεδρεύει δίνοντας τον λόγο στις ομάδες και κρατά την διδακτική δεοντολογία ενάντια στην πρόωρη αποκάλυψη γνώσης που προέρχεται από την *«στο παρακάτω μάθημα»* διδασκαλία στα φροντιστήρια και ακυρώνει την ίδια την ανακαλυπτική μάθηση. Αυτά θα διεξάγονται στα πλαίσια ενός διδακτικού συμβολαίου, που είναι δύσκολο να επιβληθεί, καθώς η έτοιμη και ήδη γνωστή γνώση, μη εμπεδωμένη οπωσδήποτε αφού δεν έχει ανακαλυφθεί από τον ίδιο τον μαθητή, δημιουργεί σοβαρές παρενέργειες, όταν δεν ακυρώνει το μάθημα. Χρειάζεται λοιπόν επιμονή, εμμονή στους κανόνες, εξοικείωση με τους κανόνες και υποστήριξη και από όλους τους διδάσκοντες όλων των υποκείμενων σε φροντιστηριακή διδασκαλία μαθημάτων, για την ανακαλυπτική στάση στην νέα γνώση, όπως κι αν κάνει κάποιος το μάθημά του δηλαδή, με ή χωρίς ΤΠΕ.

Σχέση με το εκπαιδευτικό λογισμικό

Το σενάριο υλοποιείται με το εκπαιδευτικό δυναμικό Γεωμετρικό λογισμικό Sketchpad και μπορεί να υλοποιηθεί με ελάχιστες τροποποιήσεις από οποιοδήποτε άλλο δυναμικό λογισμικό (Geogebra, Cabri, Euclidrow κ.ά.) Τα λογισμικά αυτά είναι σχεδιασμένα στην λογική της μάθησης μέσω της Μαθηματικής ανακάλυψης

Σκεπτικό του σεναρίου –καινοτομίες -προστιθέμενη αξία του Σεναρίου

Η ιδέα της με κίνηση και με μεταβολή μεγεθών και σχημάτων (δηλ. δυναμικής) προσέγγισης στην Γεωμετρία, είναι η απολύτως φυσιολογική προσέγγιση, αφού η ίδια η Ευκλείδεια Γεωμετρία, σε κοινότυπες εκφράσεις της λ.χ. «έστω τρίγωνο ΑΒΓ» δεν υπονοεί το στατικό παγωμένο ακινητοποιημένο τρίγωνο που σχεδιαζόταν 2.500 χρόνια στους πίνακες αλλά το οιοδήποτε, δυναμικώς μεταβαλλόμενο. Επομένως η προσέγγιση της διδασκαλίας της Γεωμετρίας είναι αναπόδραστα συνδεδεμένη με τα δυναμικά εργαλεία, τα οποία πλέον, είναι περισσότερο προσιτά και εξελιγμένα από κάθε περίοδο της παγκόσμιας Ιστορίας, αφού αυτό συνέβαινε ανέκαθεν και αρχαιόθεν, ήτοι η «*δια μηχανικών μεθόδων*» ανακάλυψη θεωρημάτων και προτάσεων. (Ἀρχιμήδους, Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων, «Πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος»3.83.26-3.84.3 : *Καὶ γάρ τινα τῶν πρότερόν μοι φανέντων μηχανικῶς ὕστερον γεωμετρικῶς ἀπεδείχθη διὰ τὸ χωρὶς ἀποδείξεως εἶναι τὴν διὰ τούτου τοῦ τρόπου θεωρίαν· ἑτοιμότερον γάρ ἐστι προλαβόντα διὰ τοῦ τρόπου γνῶσίν τινα τῶν ζητημάτων πορίσασθαι τὴν ἀπόδειξιν μᾶλλον ἢ μηδενὸς ἐγνωσμένου ζητεῖν.*)

Βεβαίως η βαρύνουσα παγκοσμίως Ευκλείδεια παράδοση με την απιστεύτως θαυμάσια θεμελίωσή της ίδιας της Γεωμετρίας που παρουσιάζουν τα «Στοιχεία» του Ευκλείδους, επέβαλαν τρόπον τινά την απόκρυψη του διερευνητικού –πειραματικού χαρακτήρα της Γεωμετρίας, δεδομένης και της φιλοσοφικής αποστροφής των Αρχαίων Ελλήνων για την εμπειρική πειραματική προσέγγιση της γνώσης . Όμως, ο ίδιος ο ανακαλυπτικός χαρακτήρας των Μαθηματικών, επιβάλλει και την διερεύνηση και το πείραμα εκ των πραγμάτων. Σε αυτό βοηθούν και οι νέες παιδαγωγικές αντιλήψεις περί «ανακαλυπτικής μάθησης» όπου η γνώση δι΄ ανακάλυψης του ίδιου του μαθητή, θεωρείται –και δικαίως- περισσότερο στέρεα, σε σχέση με την «μεταφορά γνώσης» της κατασταλαγμένης εμπειρίας του δασκάλου ή του βιβλίου. Στα προηγούμενα, τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά

διαπρέπουν και όχι μόνο στους γεωμετρικούς τόπους και γεωμετρικές απεικονίσεις , όπου εκεί η κίνηση στην γεωμετρία θεωρείται περισσότερο φυσιολογική, αφού και η ίδια η κίνηση των στοιχείων ενός σχήματος μεταβάλλει και την διαγεγραμμένη τροχιά ενός τόπου (δεύτερο επίπεδο κίνησης στην ίδια την τροχιά ενός σημείου ή άλλου γεωμετρικού αντικειμένου) Έτσι, εξετάζοντας την συγκεκριμένη ενότητα περί εγγεγραμμένων γωνιών, έχουμε ειδικότερα, τα εξής:

Α) Οι εγγεγραμμένες σε κύκλο γωνίες, ως έννοια, περιέχουν κίνηση. Μένουν σταθερές, καθώς διαγράφουν συγκεκριμένο τόξο. Παράλληλα, όταν η γωνία εξακολουθεί να βαίνει στο ίδιο τόξο αλλά η κορυφή της γωνίας είναι έξω ή μέσα σε συγκεκριμένο χωρίο, τότε γίνεται μικρότερη ή μεγαλύτερη από την έχουσα σταθερό μέτρο και κινούμενη στο τόξο. Δια του δυναμικού γεωμετρικού λογισμικού Sketchpad, φαίνεται εξαιρετικά παραστατικά και αναδεικνύεται η ολιστική διάσταση του -αφανώς οριζόμενου- γεωμετρικού τόπου δηλ. οι ίσες, οι μικρότερες και οι μεγαλύτερες γωνίες. Αυτό μάλιστα μπορεί να επεκταθεί αναζητώντας τα αντίστοιχα τόξα τις μικρότερες γωνίες και τις μεγαλύτερες γωνίες που βαίνουν σε σταθερή χορδή, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί εικόνα πεδίου από το φαινομενικά διάφορο γνωστικό αντικείμενο της Φυσικής. Φυσικά, το πεδίο ορίζεται και αυτό γεωμετρικά, καθώς οι γραμμές του είναι κάποιοι ειδικά οριζόμενοι εκάστοτε γεωμετρικοί τόποι.

Β) Εξαιρετικό ενδιαφέρον παρουσιάζει η διερεύνηση της γωνίας υπό χορδής και εφαπτομένης η οποία απροσδοκήτως -δια του λογισμικού- προκύπτει ως οριακή θέση της εφαπτομένης, άρα δεν πρόκειται «για άλλη» γωνία, αλλά για οριακή θέση της ιδίας της εγγεγραμμένης, επομένως είναι λογική η ισότητα.

Η ίδια η έννοια της εφαπτομένης του κύκλου, προκύπτει και αυτή φυσιολογικά ως μια χορδή της οποία το μήκος τείνει στο 0, πράγμα που αποτελεί ανάλογη (ουσιαστικά ίδια) προσέγγιση των εφαπτομένων του απειροστικού λογισμού. Και εδώ η προσέγγιση έχει την διδακτική της σημασία, καθώς είναι γνωστό ως επιστημολογικό, διδακτικό, εμπόδιο η ίδια η έννοια της εφαπτομένης καμπύλης, καθώς οι μαθητές επεκτείνουν το «μοναδικό σημείο τομής κύκλου και ευθείας» και στις καμπύλες του απειροστικού και δεν μπορούν να καταλάβουν την έννοια της εφαπτομένης (θεμελιώδης για τον Απειροστικό Λογισμό) Δεν μπορούν να καταλάβουν ότι μπορεί να υπάρχουν και δύο εφαπτόμενες σε ένα σημείο, καθώς και άλλες επίμονες παρανοήσεις που μάλλον προέρχονται από τους γεωμετρικούς ορισμούς για την εφαπτομένη, οι οποίοι όμως είναι προσαρμοσμένοι στην ειδική περίπτωση του κύκλου, χωρίς να μπορούν να επεκταθούν σε οποιαδήποτε καμπύλη. Η προσέγγιση σε σημείο μέσω οριακής θέσης τόξου μηδενικού μήκους, είναι κοινή και σωστή προσέγγιση για πάσης φύσεως καμπύλες και άρα προς την σωστή διδακτική κατεύθυνση.

Επεκτασιμότητα του Σεναρίου

Το ίδιο το λογισμικό, προσφέρει ανά πάσα στιγμή σύνδεση με την ανάλυση, καθώς όλες οι μεταβολές των μέτρων των γεωμετρικών σχημάτων, μπορούν να παρασταθούν σε άξονες. Αυτό αποτελεί την μέγιστη επεκτασιμότητα του ίδιου του λογισμικού και στην -μη προφανή για τους μαθητές - σύνδεσή του με άλλο κλάδο των Μαθηματικών. Έχουμε δηλαδή, διακλαδική σύνδεση των μαθηματικών και τελικά σοβαρή συμβολή στην ολιστική θεώρηση

της ίδιας την μαθηματικής γνώσης. Ο παρεμφερής τρόπος εργασίας στην διαπίστωση της σταθερότητας κατά μέτρο μιας εγγεγραμμένης που βαίνει σε σταθερό τόξο, επάγει την διαπίστωση την σταθερότητα του αθροίσματος των μέτρων όσων βαίνουν σε συμπληρωματικά τόξα, επομένως είναι ώριμες οι συνθήκες και για την εισαγωγή στις ιδιότητες των εγγεγραμμένων και εγγραψίμων τετραπλεύρων. Μάλιστα, εκεί που διαπιστώνεται σταθερότητα αθροίσματος μέτρων των συμπληρωματικών γωνιών, ξέρει ο μαθητής, ότι αν βγει η μία κορυφή έξω από τον κύκλο, το άθροισμα μειώνεται από 180^o , ενώ όταν μπει μέσα αυξάνεται. Η μοναδικότητα της θέσης πάνω στο τόξο για την επίτευξη του αθροίσματος των 180^o , επάγει και την ιδέα της απόδειξης για το αντίστροφο, ακόμα και την ίδια την μέθοδο απόδειξης, δηλ. τον «αποκλεισμό μέσου ή τρίτου» (εις άτοπον απαγωγή) για την εγγραψιμότητα ή μη ενός τυχόντος τετραπλεύρου.

Διδακτικοί Σκοποί & Στόχοι

- Να κατανοήσουν οι μαθητές τις έννοιες του τίτλου του μαθήματος και τις σχέσεις του μέτρου τους με τα μέτρα των τόξων που αποκόπτουν από τον κύκλο.
- Να οδηγηθούν σε ανακάλυψη γεωμετρική, από παρατήρηση αριθμητικών δεδομένων πίνακα, ώστε να δράσει το μη σύνηθες αντίστροφο για να αναδεικνύεται η ενότητα των Μαθηματικών.
- Να κάνουν μια πρώιμη εισαγωγή στην έννοια της εφαπτομένης καμπύλης ως οριακής θέσης τέμνοντος ευθ. Τμήματος το οποίο εκφυλίζεται σε σημείο .
- Να καταδειχθεί η σημασία του γεωμετρικού τόπου των σημείων του επιπέδου που βλέπουν σταθερό τμήμα με σταθερή γωνία , με μικρότερη γωνία ή με μεγαλύτερη γωνία .
- Να μπορέσουν να κάνουν μια σύνδεση της έννοιας «μορφή πεδίου» που απαντάται στην Φυσική με την έννοια «πολλών γεωμετρικών τόπων»

Φύλο Εργασίας

Επώνυμο:_________________________Όνομα_______________________
Όνομα πατ. __________________ Τάξη ____ Τμήμα ____

1. Άνοιξε το αρχείο <u>εγγεγραμμένες</u> καρτέλα «Εγγεγραμμένες1». Επιλέξτε το Ε και κινήστε το πάνω στο τόξο $\Delta E \Gamma$. Προσοχή, το Ε, αρχικά είναι πάνω στο τόξο, αλλά δεν συνδέεται με αυτό. Κινείστε το πού προσεκτικά, βλέποντας πώς μεταβάλλεται η $\Delta \hat{E} \Gamma$ που μετράται στον μετρητή .Παρατηρείστε τι γίνεται όταν ξεφεύγετε λίγο έξω ή λίγο μέσα από τον κύκλο. Στην συνέχεια, επιλέξτε τον κύκλο και το σημείο Ε και από το μενού «Επεξεργασία» επιλέξτε το «συγχώνευση σημείου σε κύκλο» Τώρα το Ε κινείται σταθερά πάνω στο τόξο. Η γωνία ΓΕΔ είναι εγγεγραμμένη και έχει μέτρο -------------μοίρες. Πλησιάστε το Ε κοντά στο Δ . Όσο και να το πλησιάσετε κοντά , η γωνία ΓΕΔ έχει υπόσταση (υπάρχει) . Όταν το Ε πάει πάνω στο Δ ,παύει να έχει νόημα η γωνία αφού εξαφανίζεται η μία πλευρά της. Αν περάσουμε το Δ η γωνία ΓΕΔ γίνεται -------------μοιρών και βαίνει πλέον στο μείζον τόξο --------------.
2. **Γεννάται το ερώτημα**: *<u>Μήπως έχει κάποιο νόημα η γωνία ΓΕΔ καθώς το Ε πάει πάνω στο Δ ;</u>* Για να το διερευνήσετε και να φαίνεται, **ταυτίστε** πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΕΔ την ευθεία (ε) πατώντας πάνω στο ταμπελάκι με το κίτρινο

άκρο. Πλησιάστε πολύ προσεκτικά το Ε στο Δ μέχρι να ταυτισθεί . Τι παρατηρείτε; ***Μήπως έχει νόημα ακόμα η γωνία ΓΕΔ καθώς το Ε ταυτίζεται με το Δ; Τι μέτρο έχει τώρα;***

Απ.: --

3. Θυμηθείτε τις σχετικές θέσεις μιας ευθείας και ενός κύκλου , μετακίνησε το Ε εκατέρωθεν του Δ και στην συνέχεια προσπαθήστε να συμπληρώσετε την παρακάτω παράγραφο:

Η ευθεία (ε) και ο κύκλος έχουν **δύο κοινά σημεία** , τα Ε, Δ , άρα η (ε) λέγεται **---------------------του κύκλου.** Όταν όμως το Ε ταυτιστεί με το Δ η ευθεία (ε) και ο κύκλος θα έχουν **ένα μόνο κοινό** σημείο , άρα η (ε) λέγεται **---------------------------του κύκλου**. Τότε , με ταυτισμένα τα σημεία Ε και Δ θα έχω την ΑΔ-----------------στην (ε) Η γωνία που θα σχηματίζει η χορδή ΔΓ και η -------------------------του κύκλου , θα είναι -------------με την αντίστοιχη εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο της χορδής.

4. Αφήστε το Ε να ταυτίζεται με το Δ και πατήστε στην ετικέτα «Εμφάνιση εγγεγραμμένης γωνίας ΓΝΔ» (καρτελάκι με κόκκινο άκρο) Καθώς το Ν διαγράφει τον κύκλο, η γωνία ΓΝΔ γνωρίζουμε ότι μένει σταθερή κατά μέτρο. Για να αποδείξουμε ότι είναι ίση με την γωνία που σχηματίζεται από την αντίστοιχη χορδή και την εφαπτομένη, πρέπει από τις άπειρες θέσεις που μπορεί να πάρει το Ν στο τόξο, λίγες να είναι βολικές για την απόδειξη. Έχετε κάποια ιδέα-θέση να δοκιμάσετε για το Ν που θα μας διευκολύνει στην απόδειξη;

Απ. Το Ν πρέπει να πάρει τέτοια θέση, ώστε---
----

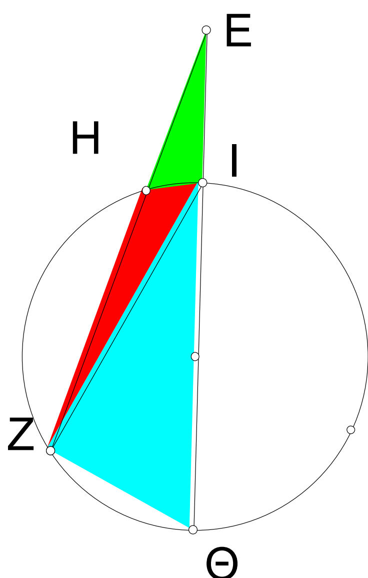
5. Ανοίξτε την καρτέλα «Εγγεγραμμένες2.» Βλέπετε την γωνία ΖΕΘ .Επιλέξτε το Ε και σιγά –σιγά μετακινείστε το πάνω στον κύκλο , όπου η γωνία θα αλλάξει χρώμα και θα γίνει γαλάζια. Παρατηρείστε την τιμή του μέτρου της γωνίας. Κάντε το και για άλλα σημεία του κύκλου. Τι παρατηρείτε και γιατί συμβαίνει αυτό που παρατηρείτε;

Απ.: ---
----

6. Μετακινείστε το Ε και έξω από τον κυκλικό δίσκο . Εμφανίζονται νέες γωνίες χρωματιστές. Πατήστε στην μέτρηση δύο εξ αυτών . Έχω τώρα την μέτρηση τριών γωνιών ΖΙΘ, ΙΖΗ , ΘΕΖ . Στον παρακάτω πίνακα , καταγράψτε τις αντίστοιχες τιμές τεσσάρων δικών σας τυχαίων στιγμιοτύπων για θέσεις του Ε εκτός του κυκλικού δίσκου.

Γων. ΖΕΘ				
Γων. ΗΖΙ				
Γων. ΖΙΘ				

Μπορείτε , με παρατήρηση των τιμών του πίνακα, να βρείτε μια σχέση με την οποία να συνδέονται οι τρεις αυτές γωνίες και να εικάσετε μια γενικότερη σχέση; Μπορείτε να την αποδείξετε αυτή ;

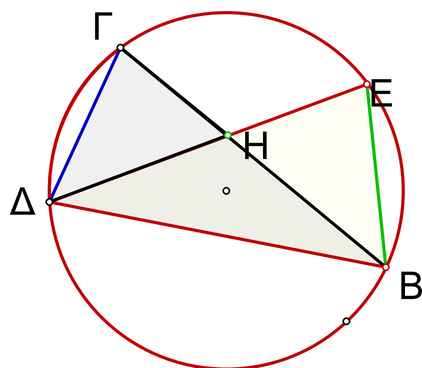


Χρησιμοποιείστε το διπλανό σχήμα:

Απάντηση:---

----

7. Ανοίξτε την καρτέλα «Εγγεγραμμένες3» Οι δύο πρώτες γωνίες που μετρώνται είναι οι εγγεγραμμένες της πράσινης και μπλε χορδής αντιστοίχως. Και η τρίτη μία από τις δύο κατά κορυφήν με κορυφή το Η . Αφού τις εντοπίσετε, μετακινείστε το Η πάρτε στιγμιότυπα του Η και προσπαθήστε να διατυπώσετε όπως και προηγουμένως μια διαπίστωση για μια απλή σταθερή αλγεβρική σχέση των τριών μεταβαλλόμενων γωνιών την οποία και να εξηγήσετε-αποδείξετε μέσω του σχήματος, όπως προηγουμένως από το παρακάτω σχήμα:



Απάντηση: ---

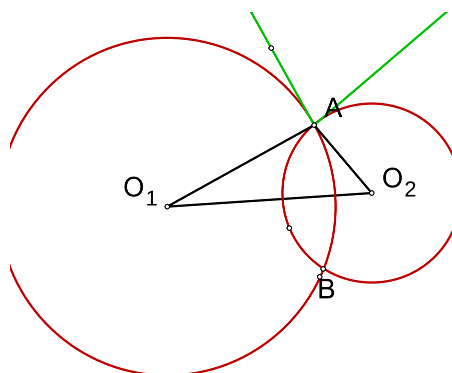
----

8. Ανοίξτε την καρτέλα «Εγγεγραμμένες4» Βλέπετε δύο κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 . Επιλέξτε τον έναν κύκλο και πλησιάστε τον στον άλλον. Οι δύο κύκλοι τέμνονται σε δύο σημεία Α, Β και ταυτόχρονα εμφανίζονται οι δύο πράσινες εφαπτόμενες στο Α , για κάθε κύκλο. Καθώς πλησιάζουν τα δύο κέντρα, αυξομειώνετε η γωνία. Οι εφαπτόμενες , είναι κάθετες στις αντίστοιχες ακτίνες που καταλήγουν στο σημείο Α της επαφής. Όταν η γωνία των εφαπτομένων γίνει **ορθή** , οι κύκλοι ονομάζονται **ορθογώνιοι.** Φέρτε τους σε ορθογώνια θέση και γράψτε τι παρατηρείτε παρακάτω:

Παρατηρώ ότι: ---

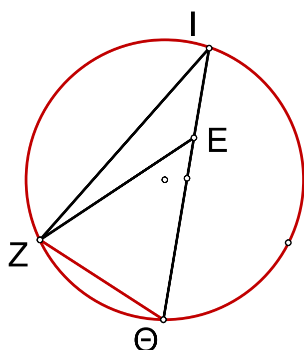
Απόδειξη:---

9. Η γωνία των κύκλων στο Β θα είναι ίση με την γωνία στο Α ; Μπορείτε να αποδείξετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας το διπλανό σχήμα;

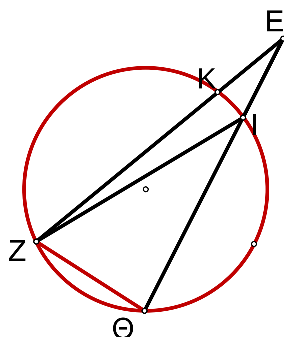


Απόδειξη:---

Ανοίξτε την καρτέλα «Εγγεγραμμένες5» . Βλέπουμε δύο γωνίες . Την εγγεγραμμένη ΖΙΘ και την ΖΕΘ οι οποίες βαίνουν στο ίδιο τόξο ΖΘ. Να επιλέξετε το Ε και να το μετακινήσετε εντός του μείζονος κυκλικού τμήματος . Παρατηρείστε την σχέση που έχει πάντα η $\measuredangle E$ με την εγγεγραμμένη $\measuredangle I$. Παρατηρείστε τι γίνεται καθώς το το Ε πλησιάζει το Ι . Τι γίνεται καθώς το Ε ταυτίζεται με το Ι και τι όταν το Ε απομακρύνεται από το Ι . Την παρατήρησής σας να την αποδείξετε με την βοήθεια των παρακάτω σχημάτων.



Απ.:____
____
____
____



Απ:____
____
____
____
____

Βρήκαμε λοιπόν, ότι όλα τα σημεία του μείζονος τόξου ΖΘ βλέπουν την χορδή ΖΘ με γωνία_________μοιρών . Όλα τα σημεία του ημι………… εκτός του κυκλικού τμήματος βλέπουν την ΖΘ με ___________γωνία , ενώ όλα τα σημεία εντός του κυκλικού τμήματος βλέπουν το ΖΘ με ___________γωνία.

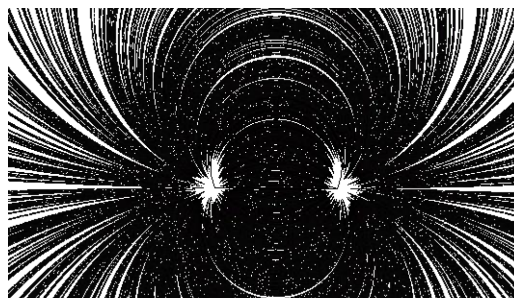
Υπάρχουν άλλα σημεία του επιπέδου τα οποία να βλέπουν την ΖΘ με γωνία 32^{o} ; Να τα κατασκευάσετε στη επιφάνεια εργασίας σας .

Διατυπώστε το γενικό συμπέρασμα για όλα τα σημεία του επιπέδου σε σχέση με την ιδιότητα να βλέπουν και με ποια γωνία το ΖΘ. Τι ισχύει ειδικώς για τα σημεία του ευθ. Τμ. ΖΘ και της ευθείας ΖΘ;

Απ.:………………… (τουλάχιστον 8 σειρές για απάντηση)…………………

Ακολουθεί η απόδειξη επί πίνακος της κατασκευής τόξου , το οποίο φαίνεται υπό δοθείσαν γωνία φ , την οποία θα κάνει ο καθηγητής, με την βοήθεια των μαθητών και της πρόσφατης προηγούμενης εμπειρίας τους. Εκεί ο καθηγητής θα διευκρινίσει την έννοια της **Ανάλυσης, σύνθεσης, κατασκευής και διερεύνησης** σε πρόβλημα κατασκευής.

Στο τέλος, (βλέπε καρτέλα «Πρόσθετο 6») μπορεί ο καθηγητής να κάνει και μια προχωρημένη επίδειξη των δυνατοτήτων του λογισμικού πάνω στο μάθημα : Παίρνει (μέσω διαδραστικού ή προβολής από φορητό Η/Υ ένα ευθύγραμμα τμήμα ΑΓ και ένα σημείο Γ του επιπέδου. Επιλέγει κατά σειράν τα σημεία Α,Γ,Β και από το μενού «κατασκευή» την επιλογή «τόξου που ορίζεται από 3 σημεία» Αφού κατασκευάσει το τόξο, επιλέγει μόνο το τόξο και έπειτα από το μενού «Προβολή» επιλέγει την εντολή «Σχεδίαση ίχνους τόξου.» Έπειτα, επιλέγει το Γ και το περιστρέφει γύρω από το Β. Θα παρουσιαστεί η μορφή εκατοντάδων γραμμών. Στην συνέχεια μπορεί να κάνει συζήτηση με ερωτήματα 1) Με τι μοιάζει. 2) Τι κοινό έχουν όλα αυτά τα τόξα. 3) Αν μπορούν δύο διαφορετικά τόξα να τέμνονται, αφού στους «πόλους» εμφανίζεται μεγάλη πύκνωση γραμμών. (Όχι, διότι αν δύο τόξα τέμνονται σε ένα άλλο σημείο πέραν των Α,Β, θα είχαν τρία κοινά σημεία, άρα θα όριζαν μοναδικό τόξο , άρα θα ταυτίζονταν)



Πρόσθετες Πληροφορίες

Στο παρόν σενάριο και ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών μπορεί να εισαχθεί και η απλούστερη εισαγωγική δραστηριότητα στην καρτέλα «Πρόσθετο 7» . Επίσης μπορεί να ζητηθεί επ΄εργαστηρίω να κατασκευάσουν οι μαθητές τραπέζιο εγγεγραμμένο σε κύκλο και μετά να εξηγήσουν (αποδείξουν) γιατί θα είναι ισοσκελές. Η κατασκευή του από τους ίδιους τους μαθητές, (καρτέλα «Πρόσθετο 8») θα βοηθήσει στην απόδειξη. Στην ηλεκτρονική έκδοση του διδακτικού βιβλίου της Α΄Λυκείου, έχουν προστεθεί και δραστηριότητες τύπου «μικροπειραμάτων» με τα λογισμικά Geogebra και Αβάκιο. Ειδικά το Κεφάλαιο 6 , υπάρχει εδώ. Επίσης πρέπει να ληφθεί υπ΄ όψιν να έχουν οι μαθητές στικάκια για αποθήκευση λογισμικών και αρχείων. Οι ταμπλέτες, είναι κάτι που επισήμως δεν επιτρέπεται διότι εμπεριέπεριέχει καταγραφικές δυνατότητες ήχου και εικόνας και μετάδοσής τους ταυτοχρονικά, πλην δεν γίνεται να μην βρεθεί το πλαίσιο γενικευμένης χρήσης τους, αφού έχουν οθόνη αφής και μπορούν να αποθηκεύσουν όλα τα βιβλία τα Σχολικά κι αυτό από τα πλέον φθηνά της αγοράς. Νομοτελειακά οδεύουμε προς τα εκεί, αφού πλέον τα προγράμματα πήγαν σε μη εγκαταστημένες αναγκαστικά σε Η/Υ εκδόσεις, ήδη το Geogebra εκδίδεται και για κινητά, ήδη παρέχεται με πλήρεις δυνατότητες μόνο μέσω των περιηγητών χωρίς εγκατάσταση και τα αρχεία τους είναι δημοσιεύσιμα εύκολα σε ιστολόγια. Η διαρκής ενημέρωση του διδάσκοντα περί της δυνατότητες των λογισμικών, πρέπει να θεωρείται εκ των ων ουκ άνευ, αφού τα συγκεκριμένα γεωμετρικά δυναμικά εργαλεία έχουν την δύναμη να αλλάξουν ποιοτικά την ίδια την διδασκαλία της Γεωμετρίας, επαναφέροντάς την στην φυσιολογική της διάσταση τροποποιώντας την επί χιλιετίες διδασκαλία της από «Πρόταση-Απόδειξη» σε ό,τι συμβαίνει και ανέκαθεν συνέβαινε στα

Μαθηματικά, δηλ. «Παρατήρηση, Πείραμα, Εικασία, Υπόθεση, Απόδειξη, Διερεύνηση, Ειδικές περιπτώσεις, Γενίκευση»

Βιβλιογραφία –Δικτυογραφία

Πλατάρος, Ι. & Παπαδοπούλου, Α. *«Ο κρυφός πειραματικός χαρακτήρας της Γεωμετρίας και η διδακτική του αξιοποίηση με χρήση των γεωμετρικών λογισμικών»* Πρακτικά 1ου Εκπαιδευτικού Συνέδριου ένταξης και χρήσης των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία. Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας Βόλος 24-26 Απριλίου 2009. Ανακτήθηκε 02 Ιανουαρίου 2015

Πλατάρος, Ι. *«Μια Γεωμετρική εφαρμογή Μεγίστου κι Ελάχιστου με χρόνο, μέσω Δυναμικού Λογισμικού, ως Διδακτική Πρόταση»* Πρακτικά 2ου Συνέδριου Ημαθίας για τις ΤΠΕ Νάουσα-Βέροια, 23-25 Απριλίου 2010. Ανακτήθηκε 02 Ιανουαρίου 2015

Πλατάρος, Ι. *«Η ολιστική διδασκαλία των απλών γεωμετρικών τόπων,* στα πλαίσια σύγχρονων παιδαγωγικών θεωρήσεων.» Πρακτικά 25ου Συνεδρίου ΕΜΕ στον Βόλο, 21-23 Νοεμβρίου 2008. Ανακτήθηκε 02 Ιανουαρίου 2015

Πλατάρος,Ι. *«Η διδακτική αξιοποίηση του λογισμικού Sketchpad στην διδασκαλία των Γεωμετρικών Απεικονίσεων στο επίπεδο.»* Πρακτικά 27ο Συνέδριου ΕΜΕ Χαλκίδος,19-21 Νοεμβρίου 2010 . Ανακτήθηκε 02 Ιανουαρίου 2015

Πλατάρος, Ι. *«Εικόνες τάξης και χάους σε διερεύνηση ιδιοτήτων ποδικού τριγώνου, μέσω δυναμικού Γεωμετρικού εργαλείου.»* Πρακτικά 31ο Συνέδριου ΕΜΕ Βέροιας, 7-9 Νοεμβρίου 2014. Ανακτήθηκε 02 Ιανουαρίου 2015

Εργασία 3η
Τα άλυτα προβλήματα της Ελληνικής Αρχαιότητας

α)Θεωρία
β)Κατασκευή οργάνων «κυβιστή» «τριχοτόμου» «τετραγωνιστή»
γ)Να διπλασιάσεις τον κύβο και να κατεβάσεις την «γάτα» από το «δένδρο»

Γενικά για τα άλυτα προβλήματα της Αρχαιότητος:

Τρία είναι τα πλέον διάσημα , για τα οποία είχε αναπτυχθεί ιδιαίτερος προβληματισμός και προσπάθεια.

- **Το «Δήλιο πρόβλημα» δηλ. ο διπλασιασμός του κύβου** , πρόβλημα που έγινε Πανελληνίως γνωστό, όταν το μαντείο του Δηλίου Απόλλωνος απάντησε για το τι πρέπει να γίνει, ώστε να απαλλαγεί η νήσος Δήλος από τον λοιμό που την μάστιζε:

-Να διπλασιαστεί ο κυβικός βωμός που Απόλλωνος

- **Η τριχοτόμηση γωνίας** , δηλαδή ο χωρισμός τυχούσας γωνίας σε τρεις ίσες γωνίες
- **Ο τετραγωνισμός του κύκλου**, δηλαδή η εύρεση τετραγώνου, το οποίο να έχει ίσο εμβαδόν με κύκλο γνωστής και δοθείσης ακτίνος.

Δήλιο Πρόβλημα:

Κατ’ αρχάς , το Δήλιο πρόβλημα , έχει ως **ανάλογό του** το πρόβλημα του **διπλασιασμού του τετραγώνου** . Δηλ. αν έχω τετράγωνο πλευράς α να βρεθεί τετράγωνο πλευράς δ : $δ^2=2α^2$, πράγμα που μας οδηγεί στην λύση του δ ως της διαγωνίου του αρχικού τετραγώνου.

Κατά τη διάρκεια λοιμού, περίπου το 430 π.Χ., οι Δήλιοι αναγκάστηκαν να συμβουλευτούν ακόμα και τον Πλάτωνα για να δώσουν λύση στο πρόβλημα. Ιδιαίτερη αναφορά είχε κάνει και ο Ερατοσθένης σε γράμμα, που έστειλε στο Βασιλικό προστάτη, Πτολεμαίο ΙΙΙ, στο οποίο περιέγραφε το μεσολάβο, ένα ειδικό όργανο που κατασκεύασε για την επίλυση του προβλήματος

Οι λύσεις που δόθηκαν στο πρόβλημα, κατά την ελληνική αρχαιότητα, σώθηκαν και φθάσανε σε μάς από τον σχολιαστή των έργων του Αρχιμήδη **Ευτόκιο** (6 αι. μ.χ). Αυτός σχολιάζοντας ανάλογο πρόβλημα του Αρχιμήδη και τη μέθοδο που αυτός χρησιμοποίησε για να το λύσει, δίνει όλες τις λύσεις παρεμβολής που του ήταν τότε γνωστές από παλαιότερες συγγραφές. **Οι λύσεις που δίνει είναι 12 και η αρχαιότερη είναι του Αρχύτα**. Οι κυριότερες από τις γνωστές λύσεις προέρχονται από τους :

Ιπποκράτη τον Χίο (470-400 π.Χ) **Αρχίτα τον Ταραντίνο** (428-365 π.χ) **Πλάτωνα** (427-347 π.Χ) **Μέναιχμο (**375- π.Χ) **Αρχιμήδη** (287-212 π.Χ) **Ερατοσθένη** (276-194 π.Χ) **Απολλώνιο** (265-170 π.Χ) **Νικομήδη (**έζησε γύρω

στο 200 π.χ) **Ήρωνα τον Αλεξανδρινό** (1ος -2ος αι. μ.Χ) **Διοκλή** (1ος αι. π.χ) και **Πάππο τον Αλεξανδρινό** (3ος αι. μ.χ)

Ο **Ιπποκράτης ο Χίος** (470-400 π.Χ) ανήγαγε το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου (δηλ. με σύγχρονη διατύπωση δοθέντος τμήματος α, να βρεθεί χ : $\chi^3=2\alpha^3$

Σε πρόβλημα παρεμβολής μεταξύ των τμημάτων α και 2 α δύο υπό αναζήτηση τμημάτων χ , ψ , τέτοιων ώστε:

$$\frac{2\alpha}{\psi}=\frac{\psi}{\chi}=\frac{\chi}{\alpha}$$

Αν μπορέσουν να κατασκευασθούν αυτά τα τμήματα, τότε από την πρώτη αναλογία θα έχω :

$\psi^2=2\alpha\chi$ (1) , ενώ από την δεύτερη $\chi^2=\alpha\psi$ (2)

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (2) με ψ έχω

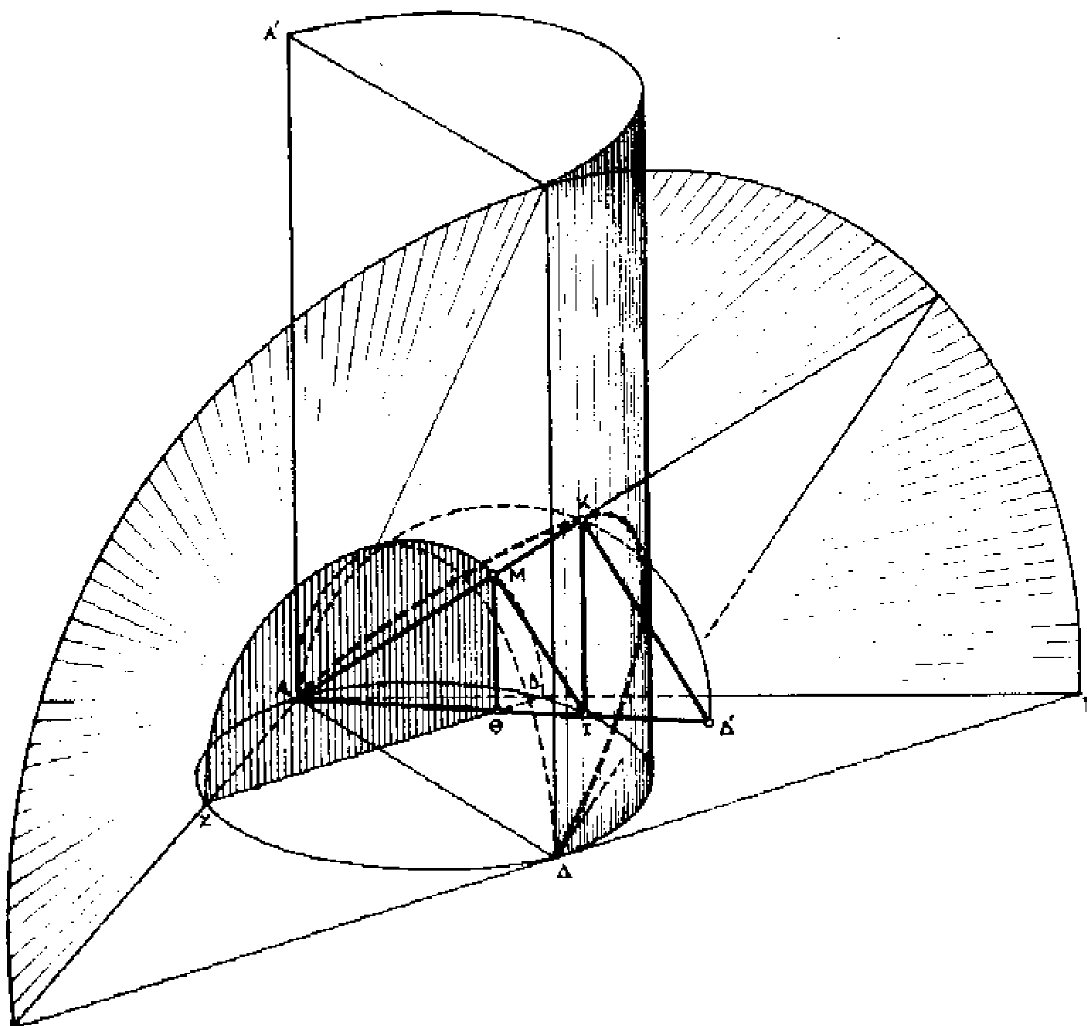
$$\psi\chi^2=\alpha\psi^2\xrightarrow{(1)}\psi\chi^2=\alpha 2\alpha\chi\xrightarrow{\chi}\psi\chi\chi^2=\alpha 2\alpha\chi^2\xrightarrow{(2)}$$

$$\psi\chi^3=2\alpha^2\chi^2\xrightarrow{(2)}\psi\chi^3=2\alpha^2\psi\rightarrow\chi^3=2\alpha^3$$

Προφανώς από την τελευταία παίρνουμε

$$\chi=\alpha\sqrt[3]{2}$$

Η λύση του Αρχύτα του Ταραντινού



Εικόνα 1 : Η λύση του Αρχύτα: γράφουμε κύκλο διαμέτρου ΑΔ=2α και χορδή του ΑΒ =α που προεκτεινόμενη τέμνει την εφαπτόμενη ΔΠ . Υψώνουμε ορθόν ημικύλινδρο με βάση το ημικύκλιο και θεωρούμε το ημικύκλιο με διάμετρο ΑΔ που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του ημικυλίνδρου. Στρέφουμε το ημικύκλιο γύρω από την ΑΑ' και η παραγόμενη σπείρα τέμνει την κυλινδρική επιφάνεια κατά μία καμπύλη ΔΚΑ . Στρέφουμε ακ΄9μη το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΠ γύρω από την ΑΔ και έτσι η ΑΠ παράγει μια κωνική επιφάνεια που κόβει την προηγούμενη καμπύλη ΔΚΑ στο Κ . Ταυτοχρόνως το Β θα διαγράψει πάνω σε αυτή την κωνική επιφάνεια ημιπεριφέρεια ΒΜΖ . έστω τώρα το ημικύκλιο ΑΚΔ' του εκ περιστροφής στερεού, που αντιστοιχεί στο σημείο Κ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΔ' . Η τομή ΜΘ των επιπέδων, ΑΚΔ' και ΒΜΖ είναι κάθετος στο επίπεδο ΑΒΔΖ διότι και τα επίπεδα αυτά είναι κάθετα επάνω του . Φέρουμε εκ

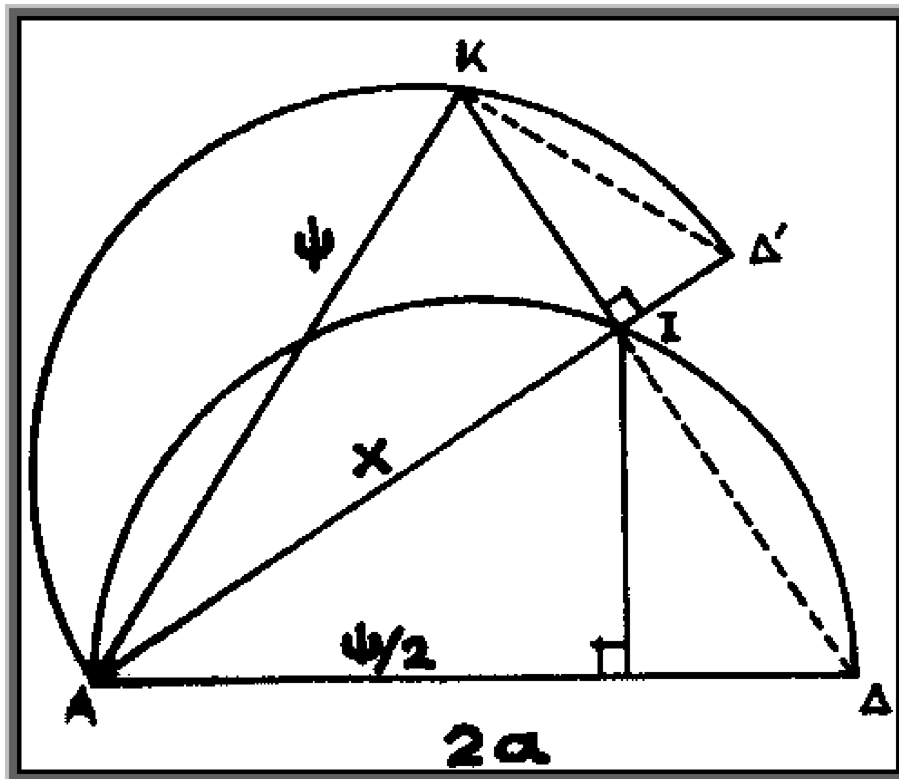
του Κ κάθετο ΚΙ πάνω στο επίπεδο του κύκλου ΑΒΔΖ Αυτή ανήκει στην κυλινδρική επιφάνεια, δηλ. το Ι βρίσκεται πάνω στον κύκλο ΑΒΔΖ == Έχουμε τώρα τον παρακάτω συλλογισμό. : Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΜΒ έχουμε: $ΜΘ^2$=ΖΘ ΘΒ (θεώρημα ύψους) . Από δύναμη σημείου ως προς κύκλο, στον ΑΒΔΖ, έχω: ΖΘ ΘΒ = ΑΘ ΘΙ . Άρα: $ΜΘ^2$ = ΑΘ ΘΙ . Επομένως, ΑΜΙ~ΑΜΘ~ ΜΘΙ και η γωνία ΑΜΙ=1 ορθή . όμως ορθή είναι και η γωνία ΑΚΔ' . επομένως η ΚΔ' είναι παράλληλη της ΜΙ . ==== Έτσι έχουμε ότι ΑΚΔ'~ ΚΑΙ~ ΑΜΙ και επομένως $\frac{ΑΔ'}{ΑΚ} = \frac{ΑΚ}{ΑΙ} = \frac{ΑΙ}{ΑΜ}$ όμως, ΑΔ'=ΑΔ λόγω της περιστροφής και ΑΜ =ΑΒ λόγω του κώνου. Έτσι

$\frac{ΑΔ = 2α}{ΑΚ} = \frac{ΑΚ}{ΑΙ} = \frac{ΑΙ}{ΑΒ = α}$ πράγμα που μας λέει ότι η πλευρά του διπλασίου του κύβου , από εκείνον που είχε πλευρά α, είναι η ΑΙ . Δηλαδή ΑΙ= $α\sqrt[3]{2}$

Πώς όμως κατέληξε σε αυτή την λύση ο Αρχύτας;

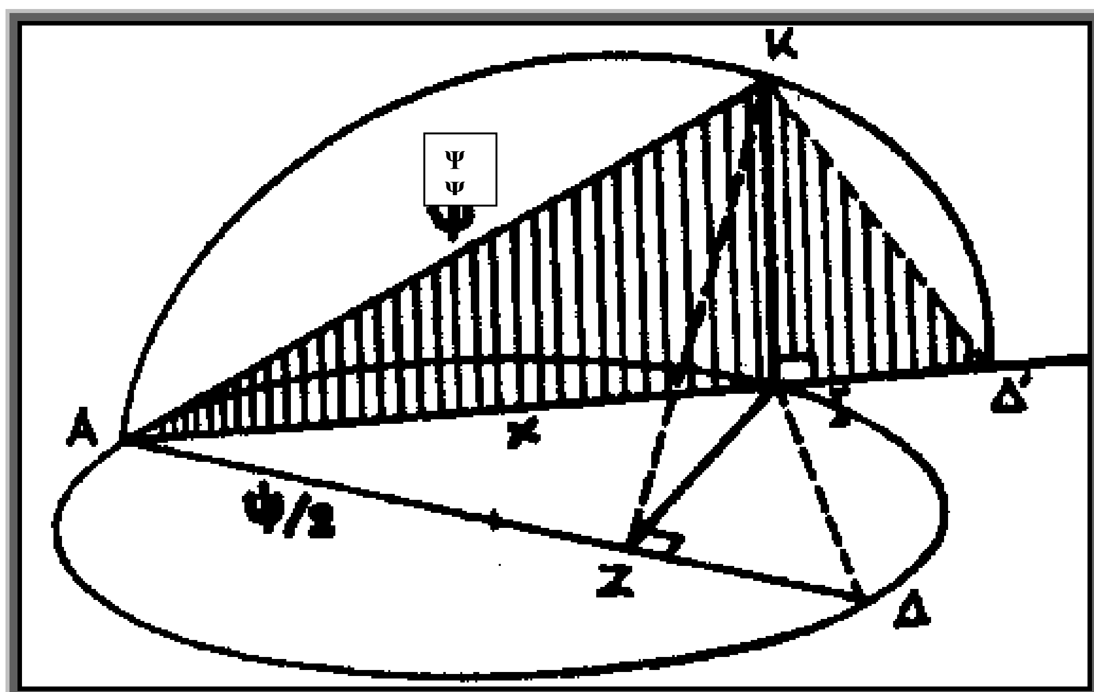
Πιθανόν ο Αρχύτας ξεκινώντας από την ανάλυση του προβλήματος που είχε κάνει ο Ιπποκράτης ο Χίος, δηλ .

$\frac{2α}{ψ} = \frac{ψ}{χ} = \frac{χ}{α}$ ανεζήτησε δύο ορθογώνια τρίγωνα , εγγεγραμμένα σε ημιπεριφέρειες διαμέτρων ΑΔ=2 α= ΑΔ' που να πληρούν τις αναλογίες $\frac{2α}{ψ} = \frac{ψ}{χ}$ και $\frac{ψ}{χ} = \frac{χ}{α}$ από αυτές παίρνω $χ^2$=αψ και $χ^2 = 2\ α\ \frac{ψ}{2}$ Τα τρίγωνα αυτά θα είναι όπως παρακάτω:

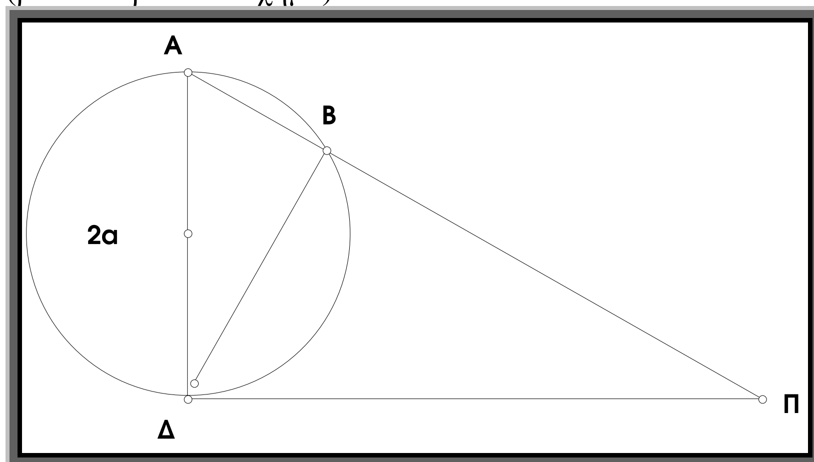


Εικόνα 2: Η αρχική ανάλυση του προβλήματος από τον Αρχύτα.

Αν στρέψουμε το επίπεδο ΑΚΔ' γύρω από την ΑΔ' μέχρι να γίνει κάθετο στο επίπεδο ΑΙΔ , τα τρίγωνα θα πάρουν την θέση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



και η ΚΙ θα είναι κάθετη στο επίπεδο ΑΙΔ . Άρα το Κ θ βρίσκεται πάνω στον ορθό ημικύλινδρο με βάση το ημικύκλιο ΑΔΙ. Τέτοια σημεία με την ιδιότητα του Κ υπάρχουν άπειρα πάνω στην επιφάνεια του ημικυλίνδρου. . Ένα όμως από αυτά ικανοποιεί την συνθήκη ΑΖ=ψ/2 . Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΚ , να έχουμε την γωνία ΚΑΖ=60^o .
Επομένως , θα αρκούσε να χαράξει πάνω στο επίπεδο ΑΔΙ μια γωνία αΑΔ=60^o (βλέπε παρακάτω σχήμα)

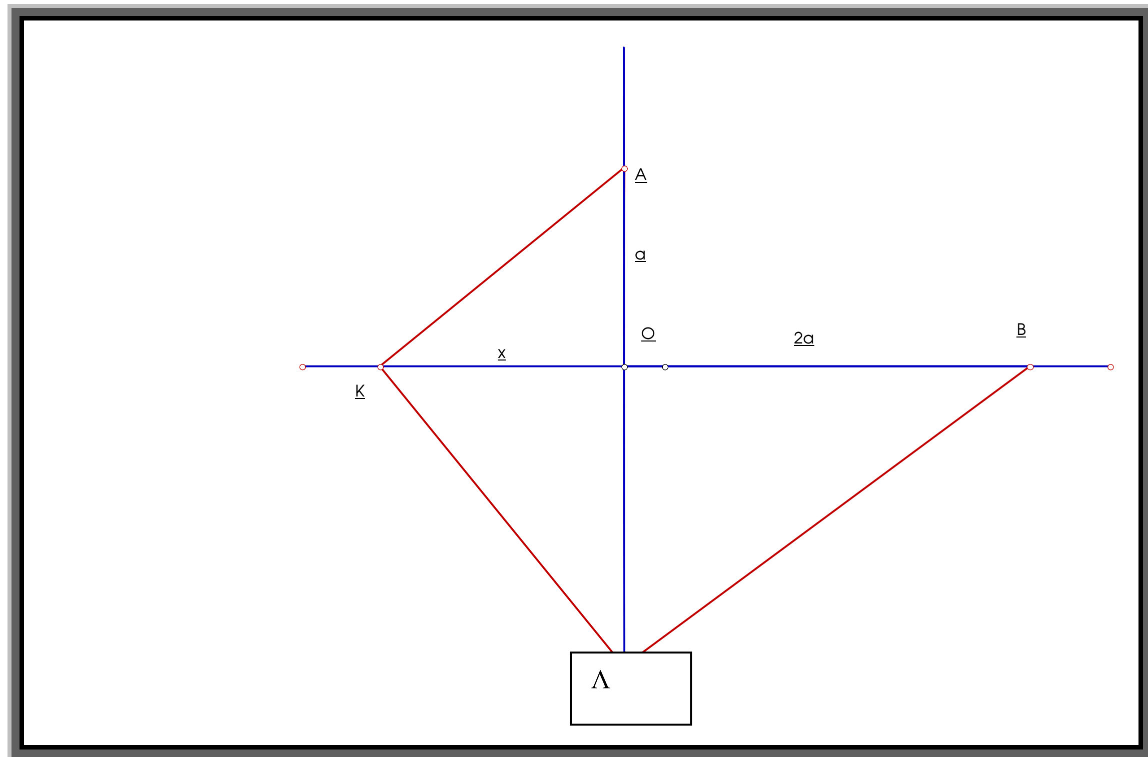


και να την στρέψει γύρω από την ΑΔ μέχρι η άλλη της πλευρά να συναντήσει την τομή της ημικυλινδρικής επιφάνειας με την σπείρα που διαγράφει το ημικύκλιο ΑΚΔ’ .
Αυτό λοιπόν κάνει ο Αρχύτας ξεκινώντας την λύση του με την κατασκευή αυτής της γωνίας παίρνοντας την διάμετρο ΑΔ=2 α και την χορδή ΑΒ = α .

Η λύση του Πλάτωνος (427-347 π.Χ.)

Ο Πλάτων επινόησε μια διάταξη , σύμφωνα με την οποία, κάνοντας μια κίνηση ενός οργάνου επί τούτω, μπορούμε να παρεμβάλουμε ανάμεσα στο α και το 2 α τους μέσους αναλόγους που προέβλεπε η ανάλυση του προβλήματος κατά τον Ιπποκράτη τον Χίο.

Στο παρακάτω σχήμα , έχω πάνω σε δύο κάθετους άξονες τα τμήματα α στον ψψ΄ και 2 α στον χχ΄ . αν μπορέσω να φέρω από τα Α και Β δύο παράλληλες ΑΚ//ΒΛ έτσι ώστε το τμήμα ΚΛ να είναι κάθετο σε αυτές, τότε το πρόβλημα λύθηκε, αφού



στο τρίγωνο ΟΚΛ για το ύψος επί την υποτείνουσα χ έχω

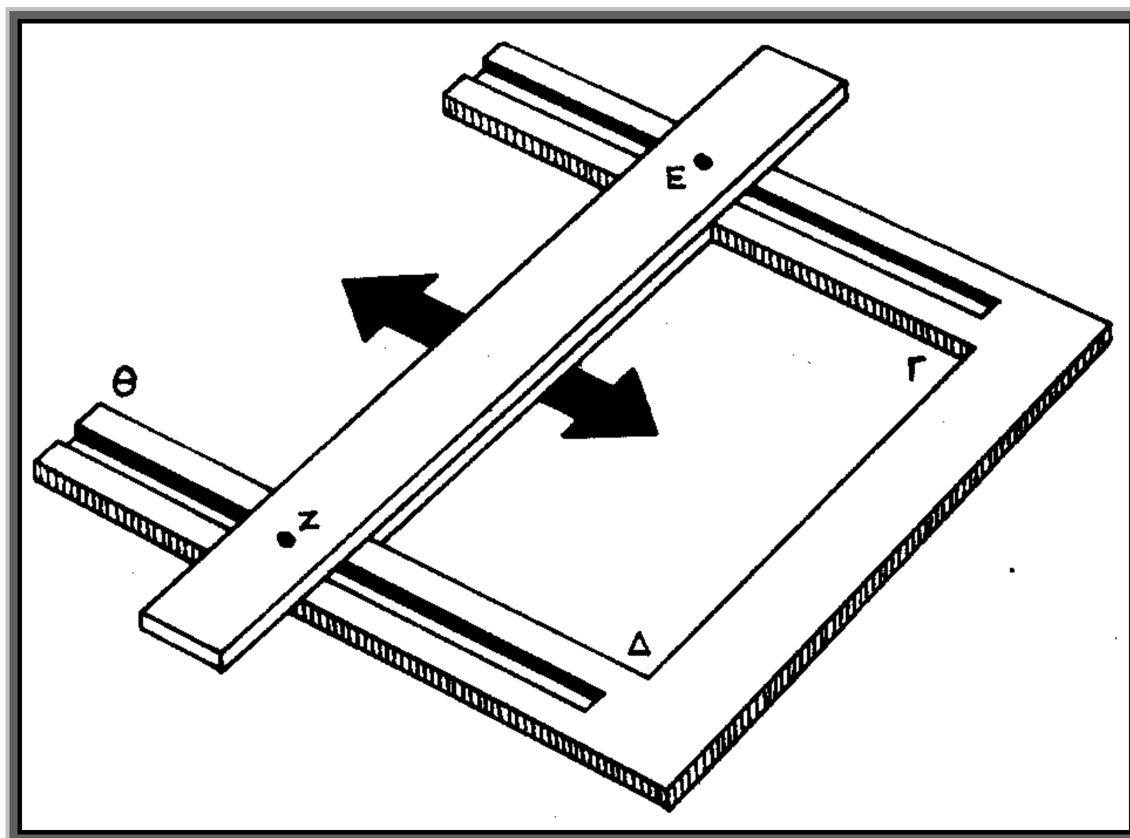
χ^2=α. ΟΛ (1), στο ορθογώνιο ΒΚΛ έχω $ΟΛ^2$=χ . 2α (2)

Λύνοντας την (1) ως προς ΟΛ , αντικαθιστώ στην (2) και έχω διαδοχικά :

$$ΟΛ=\frac{\chi^2}{\alpha}\xrightarrow{(2)}\left(\frac{\chi^2}{\alpha}\right)^2=\chi 2\alpha\rightarrow\frac{\chi^4}{\alpha^2}=2\alpha\chi\rightarrow\chi^4=2\alpha^3\chi\rightarrow\chi^3=2\alpha^3$$

$$\chi\ =\alpha\sqrt[3]{\alpha}=ΟΚ$$

Το όργανο με το οποίο επιτυγχάνεται η κατασκευή του Χ , είναι το παρακάτω:



Εικόνα 3: Ο κυβιστής του Πλάτωνος

Το ανωτέρω όργανο χρησιμοποιείται ως εξής:

Η εσωτερική κορυφή Δ του οργάνου τοποθετείται σε τυχαίο σημείο της Οψ . Φροντίζουμε , η πλευρά ΔΓ να περνάει από το Β . Κινούμε την ΕΖ , γλυστρώντας ταυτόχρονα την κορυφή Δ , πάνω στην Οψ ,μέχρι να βρούμε την θέση, κατά την οποίαν , το κινητό στέλεχος ΕΖ , να περνά από το σημείο Α και από την τομή Κ της Οχ και της πλευράς ΔΘ του οργάνου.

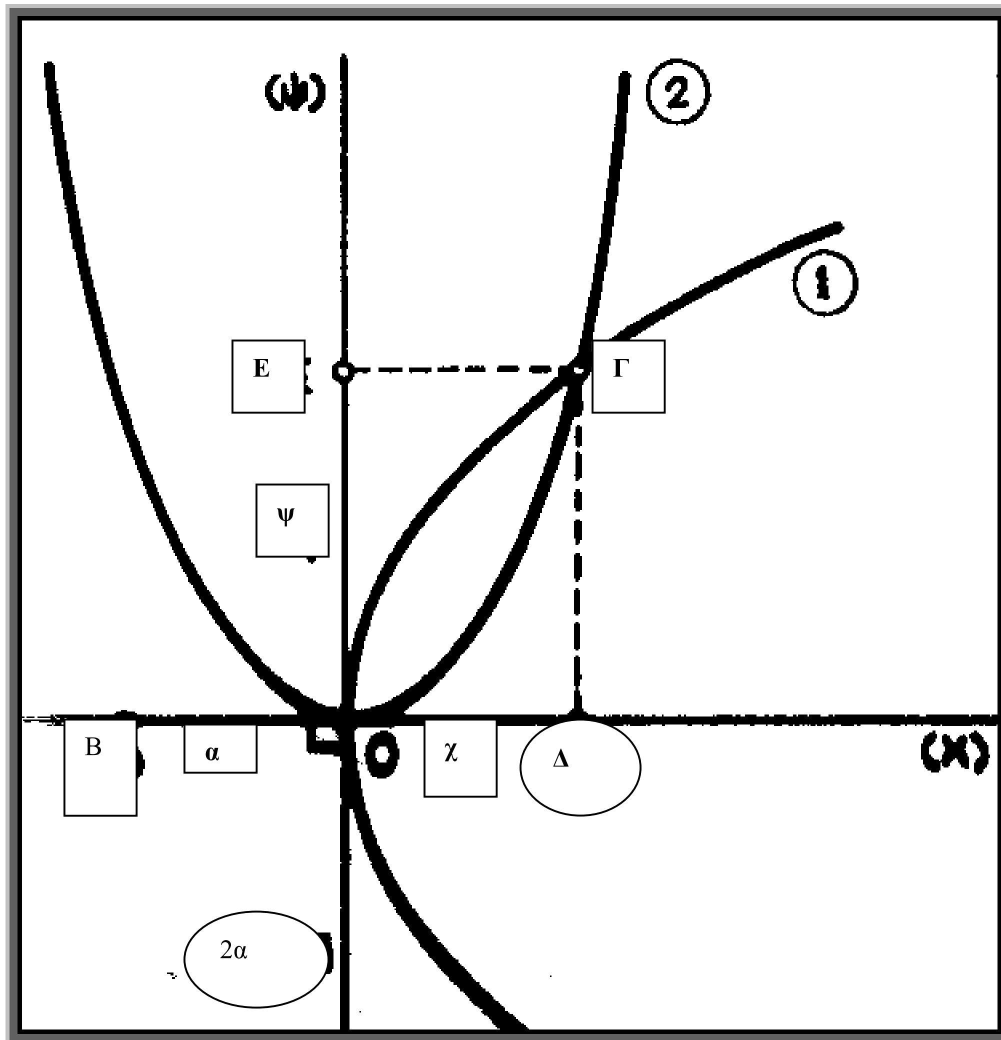
Τότε , τα ζητούμενα σημεία , θα είναι τα Λ και Κ.

Μια λύση του Μεναίχμου

Στο παρακάτω σχήμα ο Μέναιχμος κατασκευάζει δύο παραβολές , τις

$Ψ^2=2αχ$

$Χ^2=αψ$



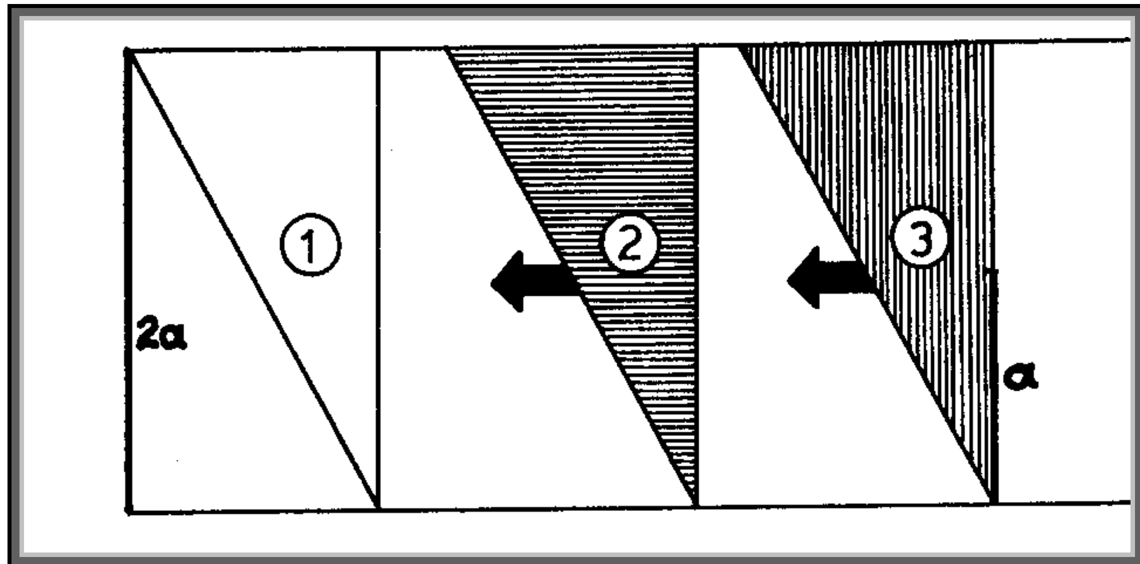
Η τομή τους είναι το Γ . Τότε . όπως ευκόλως μπορούμε αλγεβρικώς να διαπιστώσουμε, το ΟΔ είναι το ζητούμενο

$\chi = \alpha\sqrt[3]{2}$.

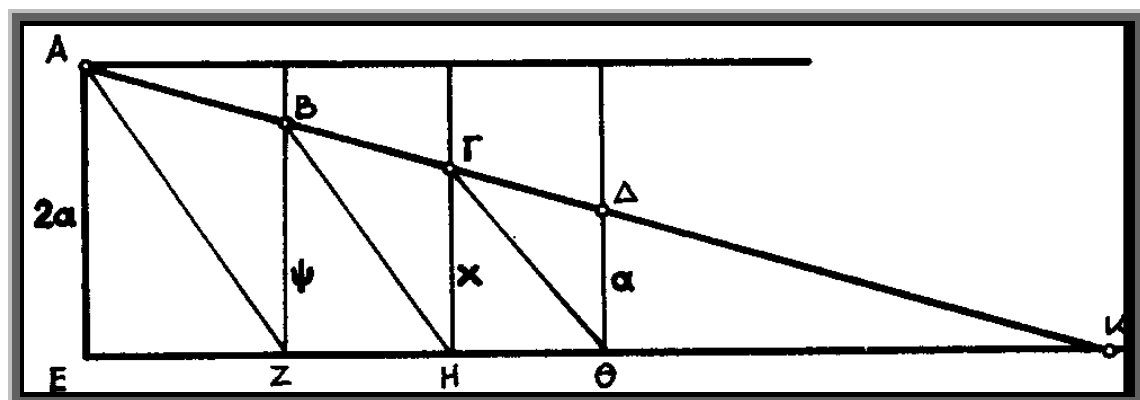
<u>Η λύση του Ερατοσθένους</u>

Η λύση αυτή υλοποιείται με την κατασκευή οργάνου που λέγεται «μεσολάβιον» και το οποίο επιτυγχάνει την κατασκευή των ενδιαμέσων χ και ψ όπως προέβλεπε η ανάλυση του Ιπποκράτους του Χίου.

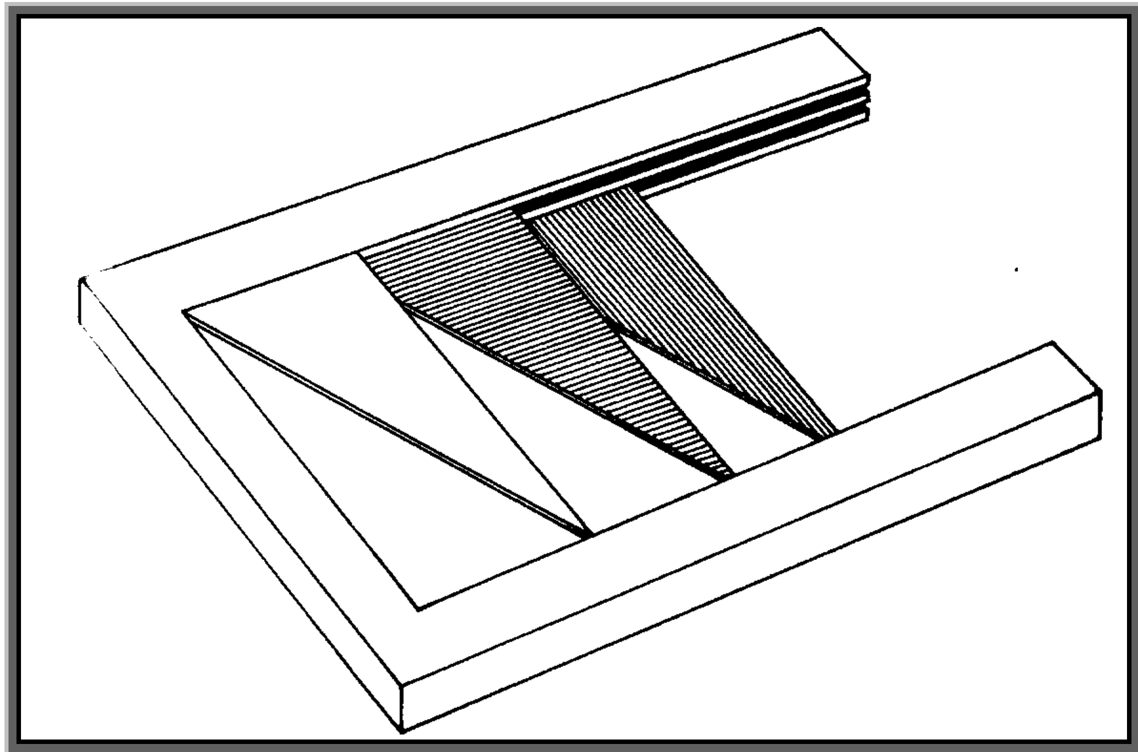
Στα παρακάτω σχήματα



Εικόνα 4: Με διαδοχικές μετατοπίσεις των κινητών τριγώνων βρίσκουμε τα ενδιάμεσα σημεία Γ και Β , καθιστώντας τα συνευθειακά με τα Δ και Α (βλέπε επόμενο σχήμα)



Εικόνα 5: λαμβάνοντας ως αρχή το τμήμα α , με κατάλληλη μετακίνηση των ίσων ορθογωνίων τριγώνων , βρίσκω τα Β και Γ . Από το Θεώρημα του Θαλή , προφανώς ισχύει η σχέση της γνωστής ανάλυσης του προβλήματος από τον Ιπποκράτη τον Χίο. Έτσι προσδιορίζεται το Χ .

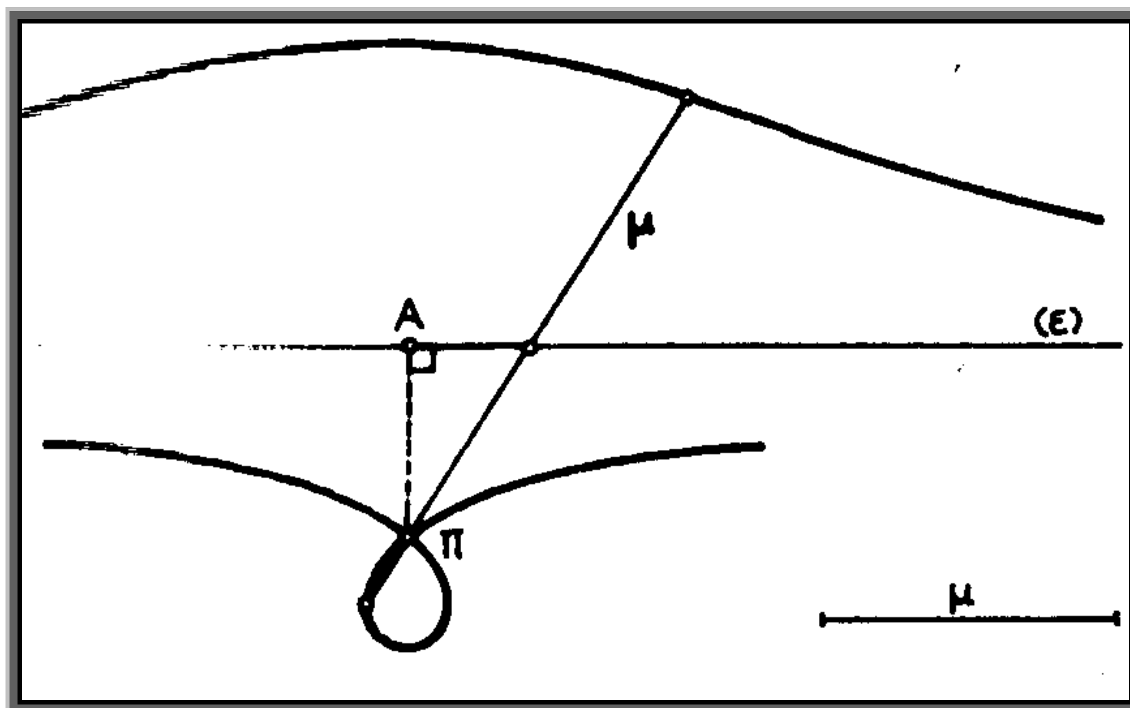


Εικόνα 6: Η υλοποίηση της λύσης του Δηλίου προβλήματος γίνεται με το κατωτέρω όργανο όπου τα ίσα ορθογώνια τρίγωνα κινούνται συρταρωτά και επιτυγχάνεται η συνευθιακότητα.

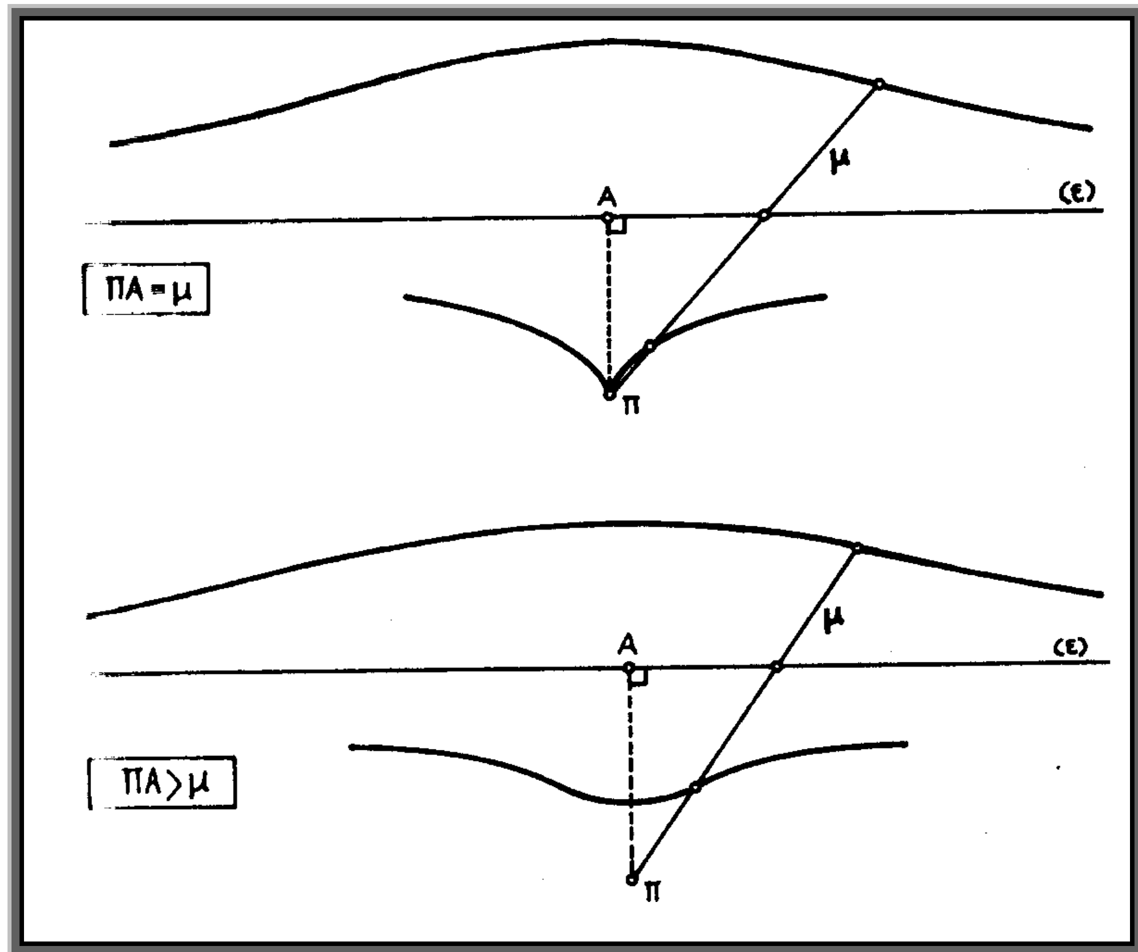
Η λύση με την βήθεια της κογχοειδούς του Νικομήδους

Αυτή η λύση είναι αρκετά πολύπλοκη, καθώς χρειάζεται η κατασκευή της κογχοειδούς του Νικομήδους , η πρόταση ΙΙ.6 των Στοιχείων του Ευκλείδη το πυθαγόρειο Θεώρημα, το θεώρημα του Θαλή , ομοιότητα τριγώνων κ..ά.

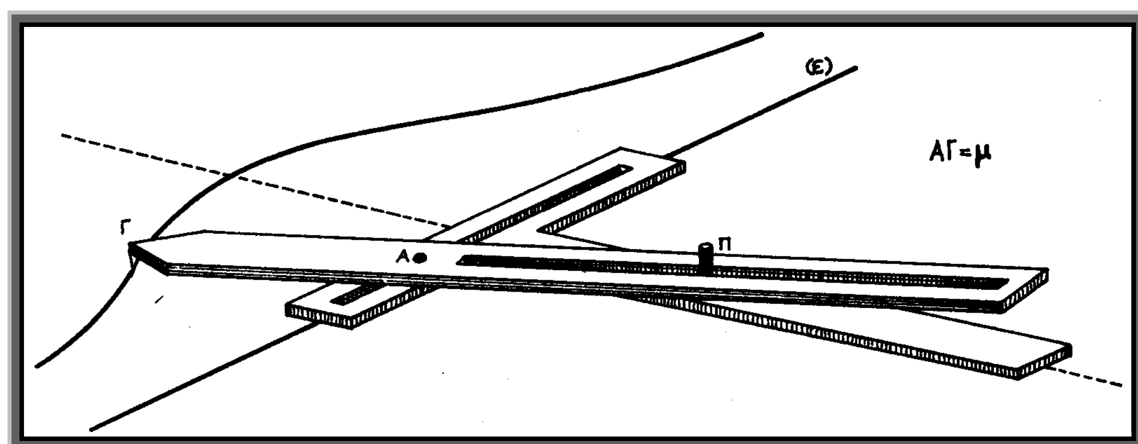
Ας ξεκινήσουμε με τον ορισμό και την κατασκευή της κογχοειδούς.



Εικόνα 7: Έχουμε ένα σταθερό σημείο Π . επίσης μια σταθερή ευθεία (ε) . Ακόμα έχουμε σταθερό ΄κατά μήκος ένα ευθ. τμήμα μ . Από το Π , φέρω την οικογένεια των ευθειών που τέμνουν την (ε) . Εκατέρωθεν των σημείων τομής της (ε) με την οικογένεια των ευθειών , λαμβάνω τμήματα ίσα με μ . Με ένωση όλων των σημείων έχω την κογχοειδή. Στο παραπάνω σχήμα , τυχαίνει η απόσταση του Π από την (ε) να είναι μικρότερη από το μ και η κογχοειδής έχει και έναν βρόγχο .Στα επόμενα δύο σχήματα, έχομε τις υπόλοιπες δύο περιπτώσεις όταν ΠΑ=μ και ΠΑ>μ



Εικόνα 8: Οι υπόλοιπες δύο περιπτώσεις για την κογχοειδή του Νικομήδη.



Εικόνα 9: Το όργανο που υλοποιεί την κατασκευή της κογχοειδούς . Το όργανο έχει δύο σταθερούς κάθετους κανόνες σε σχήμα «Τ» σταθερούς, και έναν κινητό.

Η γραφίδα κινείται πάντα κατά τέτοιο τρόπο , έτσι ώστε να διέρχεται πάντα από τον πόλο Π και η γραφίδα να απέχει από την ευθεία πάντα μήκος μ .

<u>Πρόταση ΙΙ.6 Των Στοιχείων του Ευκλείδη:</u>

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ.

Εικόνα 10: η απόδειξη της προτάσεως του Ευκλείδη καθίσταται προφανής από την παρατηρήσουμε την ισότητα των εμβαδών των σχημάτων που έχουν το ίδιο χρώμα. Ο Ευκλείδης κάνει κάτι παρόμοιο χρησιμοποιώντας τον γνώμονα ΓΔΖΗΝΛ. Παραθέτουμε την απόδειξη από το πρωτότυπο.

<u>Η Απόδειξη της ΙΙ.6 των Στοιχείων από το πρωτότυπο:</u>

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προσκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΓ, ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ, ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ

τῷ ΓΘ. ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΘΖ ἐστιν ἴσον. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ̇ ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ̇ ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ̇ καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ [περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ]. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ̇ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ̇ τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ, ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προστεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας, τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προσκειμένῃ καὶ τῆς προσκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προσκειμένης τετραγώνῳ̇

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ας δούμε όμως πώς ο Νικομήδης υλοποίησε την κατασκευή του, στο παρακάτω σχήμα:

Ο Νικομήδης θεωρεί δύο κάθετους άξονες Βχ και Βψ και πάνωτους τα μήκη ΒΑ =2 α και ΒΓ=α . Επίσης θεωρεί τα μέσα τους Λ και Ε αντιστοίχως. Στην Βγ φέρνει μεσοκάθετο και και πάνω της κατασκευάζει σημείο Ζ με την ιδιότητα ΓΖ =α παίρνει και ΗΒ=ΑΔ=α . Από το Η φέρνει την ΗΖ και από το Γ την παράλληλο (ε0 προς αυτήν.

Στην συνέχεια, με την βοήθεια της κογχοειδούς, ο Νικομήδης κατασκευάζει με ταξύ των πλευρών της γωνίας εΓχ , τμήμα α , έτσι ώστε προεκτεινόμενο , να περνά από το Ζ . Αυτό επιτυγχάνεται, αν πάρουμε ως πόλο της κογχοειδούς το Ζ , βάση την Γε και σταθερό διάστημα το μήκος α .

Η κογχοειδής τέμνει την Βχ σε σημείο Κ και η ΚΔ την Βψ στο Μ . Τότε , στα τμήματα ΒΑ=2 α και ΒΓ =α , μέσες ανάλογες είναι οι ψ=ΓΚ και χ=ΑΜ. Έτσι θα έχω χ= $\alpha\sqrt[3]{2}$

Πώς όμως δικαιολογείται αυτό;

Ας το δούμε:

Σύμφωνα με την ΙΙ.6 , θα ισχύει:

$BK\ \Gamma K + E\Gamma^2 = EK^2$ (1)

Με πρόσθεση και στα δύο μέλη της (1) του EZ^2 , έχω:

$BK\ \Gamma K + EZ^2 + EZ^2 = EK^2 + EZ^2 \Rightarrow$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)

$BK\ K\Gamma + \alpha^2 = ZK^2$ (*)

Ομοίως , για το τμήμα ΑΒ που έχει προέκταση το ΑΜ , θα έχω :

$BM\ MA + \alpha^2 = \Lambda M^2$ (**)

ΓΘ//ΗΖ→ (θεώρημα Θαλή) $\frac{2\alpha}{\psi} = \frac{Z\Theta}{\alpha}$

Επίσης τριγ. ΑΜΔ~ΔΓΚ, από όπου έχω: $\frac{2\alpha}{\psi} = \frac{\chi}{\alpha}$

Από τις δύο τελευταίες σχέσειςέχω ότι $\chi = Z\Theta \Rightarrow \chi + \alpha = Z\Theta + \alpha$ καθώς και $\frac{2\alpha}{\psi} = \frac{Z\Theta}{\alpha} = \frac{\chi}{\alpha}$ (3)

Δηλ. ΖΚ=ΛΜ(***)

Από (*), (**),(***) έχω ότι ΒΚ ΓΚ =ΒΜ ΑΜ ή

$\frac{\psi}{\chi} = \frac{BM}{BK}$ (#)

Αλλά από τα όμοια τρίγωνα ΜΒΚ ~ ΜΑΔ έχω: $\frac{BM}{BK} = \frac{\chi}{\alpha}$ (##)

Έτσι , από (#) και (##) έχω $\frac{\psi}{\chi} = \frac{\chi}{\alpha}$

Από την τελευταία σχέση και από την (3) , έχω ότι

$\frac{2\alpha}{\psi} = \frac{\psi}{\chi} = \frac{\chi}{\alpha}$ που μας δίνει το αποδεικτέο.

Το "Δήλιο πρόβλημα" μέχρι και τον 19ο αιώνα απασχόλησε άπαντες τους μαθηματικούς και όχι μόνο. Έγινε αντικείμενο ιδιαίτερης μελέτης και τελικά χαρακτηρίστηκε ως άλυτο, αφού η λύση του με την χρήση αποκλειστικά του κανόνα και του διαβήτη είναι αδύνατη.

Με το πρόβλημα ασχολήθηκαν, επίσης, ο Εύδοξος, ο Descartes και ο Longchamps, οι λύσεις όμως που πρότειναν οδηγούσαν σε καμπύλες και επιφάνειες βαθμού μεγαλυτέρου του δύο.

Που όμως οφείλεται το αδύνατο της επίλυσης του διπλασιασμού του κύβου με τον κανόνα και το διαβήτη;

Το ζητούμενο είναι η εύρεση της πλευράς x, με μόνα εργαλεία τον κανόνα και το διαβήτη, ενός κύβου, που ικανοποιεί την εξίσωση χ^3-2=0 . Αν δεχθούμε ότι το x είναι κατασκευάσιμο, τότε αυτό ανήκει σε ένα σώμα F_k με στοιχεία u της μορφής $u = p + q\sqrt{\omega}$ με p, q, $\omega \in F_{k-1}$ (Τα σώματα F_k, F_{k-1} προκύπτουν με κατάλληλες προεκτάσεις μέσω συνεχών εξαγωγών κυβικών ριζών του σώματος F_0 , που ταυτίζεται στην προκειμένη περίπτωση με το σύνολο των ρητών αριθμών). Αποδεικνύεται, ότι αν $x = \omega + \varphi\sqrt{\nu}$ είναι λύση της εξίσωσης $\chi^3=2$ τότε και η $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ είναι λύση της, γεγονός που οδηγεί σε άτοπο, αφού, τότε η εξίσωση θα έχει δύο πραγματικές ρίζες, ενώ το $\sqrt[3]{2}$ είναι η μόνη πραγματική και οι υπόλοιπες φανταστικές (Σημειώνουμε ότι η εξίσωση $\chi^3=2$ προκύπτει από διπλασιασμό κύβου με μοναδιαία πλευρά).

Η παραπάνω απόδειξη έδωσε τέλος στις προσπάθειες για την επίλυση του προβλήματος και κατέταξε το Δήλιο πρόβλημα μαζί με αυτά της τριχοτόμησης τυχαίας γωνίας, της κατασκευής κανονικών πολυγώνων πλευρών p^{ν} με p πρώτο και τον τετραγωνισμό του κύκλου στα λεγόμενα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα.

Η ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΓΩΝΙΑΣ

Εισαγωγικά:

Η τριχοτόμηση της ορθής γωνίας είναι ένα εύκολο πρόβλημα, αφού το 1/3 της ορθής είναι η γωνία των 30^o η οποία κατασκευάζεται είτε με διχοτόμηση των 60^o από την κατασκευή του ισοπλεύρου τριγώνου (πρόταση Ι.1 Στοιχείων) είτε από κατασκευή ορθογωνίου τριγώνου με μία κάθετη πλευρά ίση με το ήμισυ της υποτείνουσας.
Επομένως , η διχοτόμηση μιας αμβλείας γωνίας αφαιρουμένης της ορθής που τριχοτομείται, ανάγεται στην τριχοτόμηση οξείας γωνίας, πράγμα που κατέστη δυσκολότατο.
Σήμερα γνωρίζουμε το αδύνατον της λύσης αυτού του προβλήματος με κανόνα και διαβήτη, αφού η εξλισωση που την εκφράζει είναι τρίτου βαθμού , χωρίς να μπορεί να αναχθεί σε δευτέρου και να είναι κατασκευάσιμη.
Από την τριγωνομετρία γνωρίζουμε την ταυτότητα:

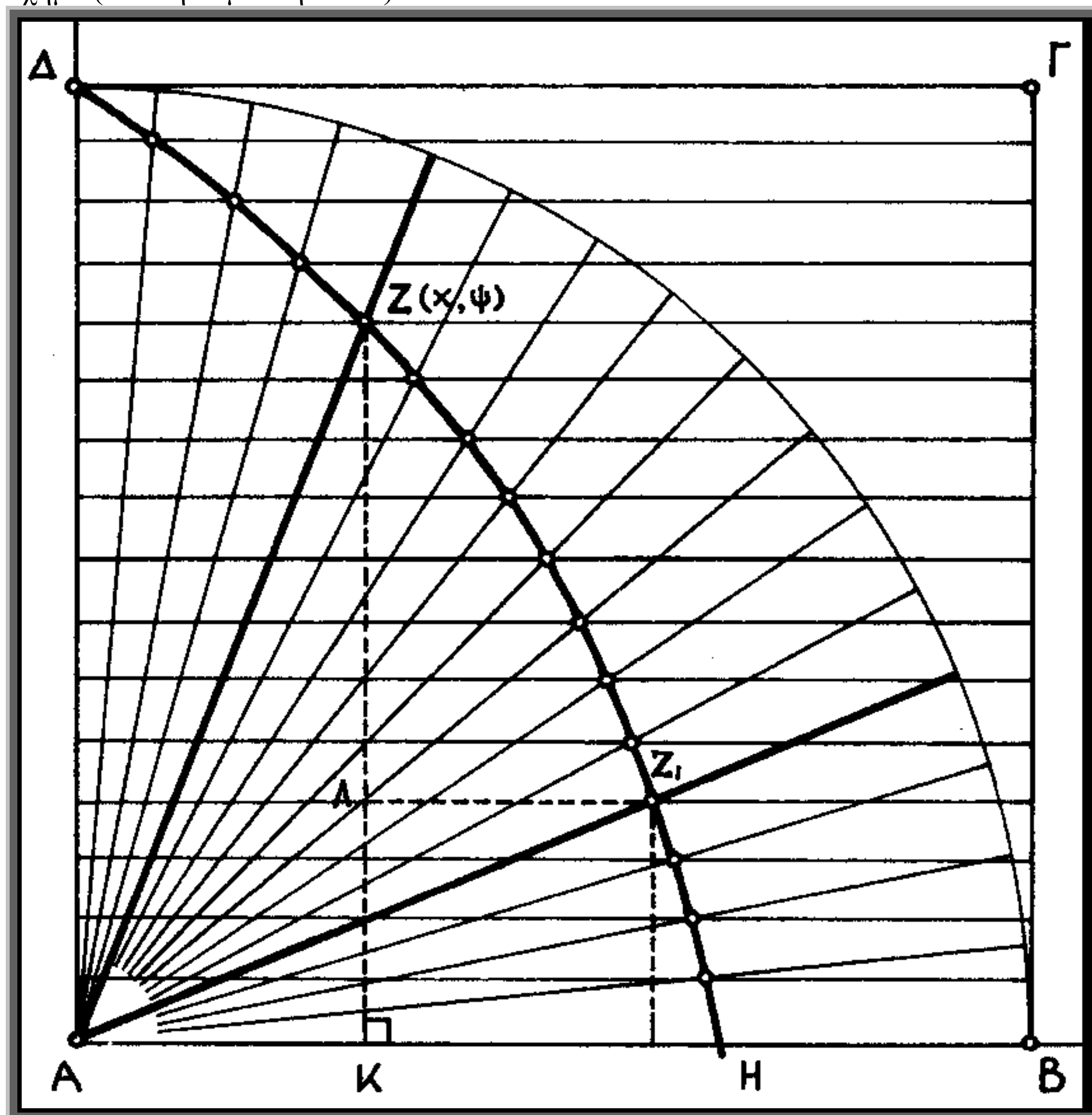
$$\varepsilon\phi 3\theta = \frac{3\varepsilon\phi\theta - \varepsilon\phi^3\theta}{1 - 3\varepsilon\phi^3\theta}$$

Σε αυτή την εξίσωση, αν θέσουμε εφ3θ=α (γνωστός) και εφθ=χ (άγνωστος) με πράξεις καταλήγουμε στην ισοδύναμή της : $\chi^3-3\alpha\chi^2-3\chi+\alpha=0$, που είναι η εξίσωση η εκφράζουσα την τριχοτομία.
Ο τετραγωνισμός της εξίσωσης αυτής όπως απεδείχθη το 1837 είναι αδύνατος.

Η λύση του Ιππία του Ηλείου (με την τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτους)

Ο Ιππίας υπήρξε ο πρώτος γεωμέτρης που έλυσε το πρόβλημα, με την βοήθεια της καμπύλης που αργότερα ο Δεινόστρατος προσπάθησε να τετραγωνίσει τον κύκλο.

Στο παρακάτω σχήμα , φανταζόμαστε ένα σημείο στο Δ, το οποίο εκτελεί μια σύνθετη κίνηση:
1)Μία ομαλή ευθύγραμμη κίνηση κατά την διεύθυνση ΔΑ
2)Μία ομαλή κυκλική με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από το Α , με ακτίνα ΑΔ.
Οι δύο προηγούμενες ταχύτητες, είναι τέτοιες ώστε ο χρόνος που απαιτείται για την διάνυση του διαστήματος ΑΔ , είναι ίσος με τον χρόνο που απαιτείται για στροφή 90^o .
Συνεπώς το Δ εκτελεί σύνθετη κίνηση και η τροχιά του φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (είναι η καμπύλη ΑΖΗ)



Η καμπύλη αυτή κατασκευάζεται ως εξής:
Αφού σε ίσους χρόνους διανύονται ίσα διαστήματα και και διαγράφονται ίσες γωνίες, χωρίζω το τετράγωνο και το ΑΔ σε επαρκή αριθμό ίσων διαστημάτων με παράλληλες προς την ΑΒ . Κατόπιν κατασκευάζω τόσες ίσες γωνίες, όσα και τα διαστήματα που κατασκεύασα , χωρίζοντας την ορθή σε αντίστοιχα ίσα διαστήματα.

Στην συνέχεια κατασκευάζω το πρώτο σημείο της ζητουμένης καμπύλης , ως τομής του πρώτου διαστήματος και την πρώτης γωνίας. Δεύτερο σημείο η τομή του δευτέρου διαστήματος και την δεύτερης γωνίας. Τρίτο η τομή του τρίτου και την τρίτης γωνίας κ.ο.κ.
Στην συνέχεια συνδέω τα σημεία με όση ακρίβεια μπορώ. Όσο πιο πολλά τα ίσα διαστήματακαι οι γωνίες, τόσο καλύτερη η ακρίβεια που επιτυγχάνω.
Αν α η πλευρά του τετραγώνου, Τ ο χρόνος πτώσης υ η επικαμπύλιος ταχύτητα , ω η γωνιακή ταχύτητα, θα ισχύουν οι σχέσεις:

$α=υT$ και $\frac{\pi}{2} = ωT$

Επισης για το τυχόν σημείο Ζ με συντεταγμένες (χ,ψ) θα ισχύουν:

$α - ψ = υt$ και $\frac{\pi}{2} - θ = ωt$ όπου υ, ω οι ταχύτητες και t ο χρόνος κίνησης μέχρι το σημείο Ζ ενώ θ είναι η γωνία ΖΑχ

Επίσης ισχύει και η σχέση υ =ω α
Με απαλοιφή μεταξύ των σχέσων των αγνώστων υ, ω, Τ, παίρνω

$$\frac{α - ψ}{\frac{\pi}{2} - θ} = \frac{α}{\frac{\pi}{2}} = \frac{ψ}{θ} \Rightarrow$$

$$ψ = \frac{2α}{\pi} θ \Rightarrow$$

$$ψ = \frac{2α}{\pi} τοξεφ \frac{ψ}{χ}$$

Η τελευταία, είναι η εξίσωση της τετραγωνίζουσας με καρτεσιανές συντεταγμένες.
Επίσης ΑΗ =2α/π
Το παραπάνω, υποδηλώνει, ότι αν είναι δυνατόν να κατασκευασθεί η καμπύλη με κανόνα και διαβήτη, τότε και το π είναι κατασκευάσιμο.
Για την τριχοτόμηση όμως έχω:
Έστω ότι θέλω να τριχοτομίσω την οξεία γωνία θ =ΖΑΒ.
Από την εξίσωση της καπύλης έχω ότι ψ=2αθ/π , από την οποία (με διαίρεση και των δύο μελών με το 3) εξάγεται η σχέση:

$$\frac{ψ}{3} = \frac{2α}{\pi} \frac{θ}{3}$$

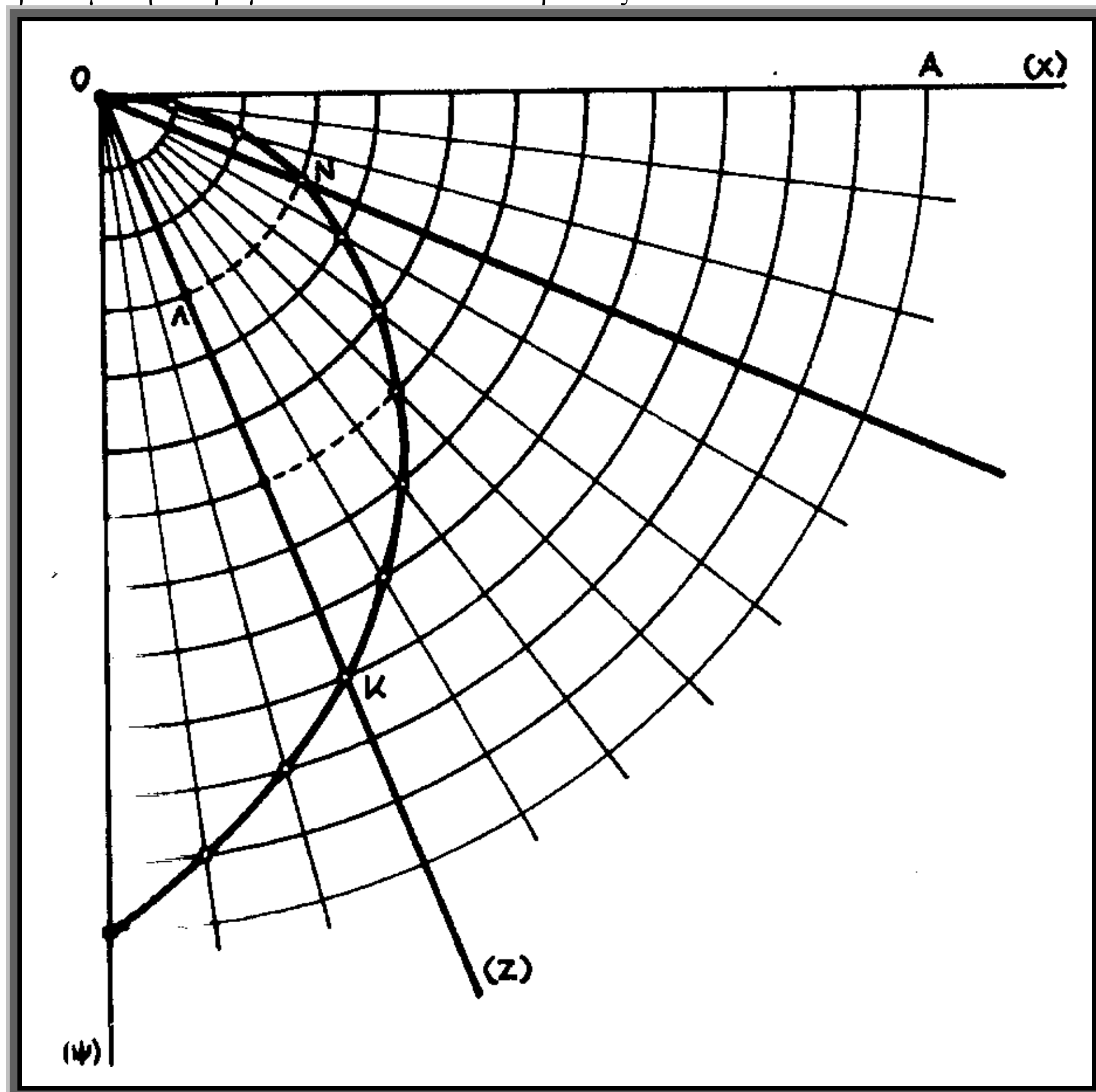
από την παραπάνω σχέση, έχω ότι το ζητούμενο σημείο για την τριχοτόμηση, είναι αυτό που έχει τεταγμένη ψ/3 , το οποίο ευκόλως προσδιορίζεται με τριχοτόμηση του τμήματος ΖΚ.

<u>Η λύση του Αρχιμήδη με την έλικά του</u>

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την έλικα του Αρχιμήδη, με την βοήθεια της οποίας μπορούμε να τριχοτομήσουμε μια γωνία. Η έλιξ είναι η καμπύλη ΟΝΚ , η οποία παράγεται, αν φανταστουμε ότο το σημείο Ο μετέχει δύο κινήσεων:

1) Μιας ομαλής κυκλικής κίνησης με σταθερή γωνιακή ταχύτητα και
2) Μιας ομαλής γραμμικής κατά μήκος μιας ακτίνας.

Σε ίσους χρόνους διαγράφει ίσες γωνίες και ίσα διαστήματα στην επιβατική ακτίνα. Συνεπώς μπορεί να κατασκευασθεί από διακριτά σημεία κατά ανάλογο τρόπο με την τετραγωνίσουσα του Δεινοστράτους.



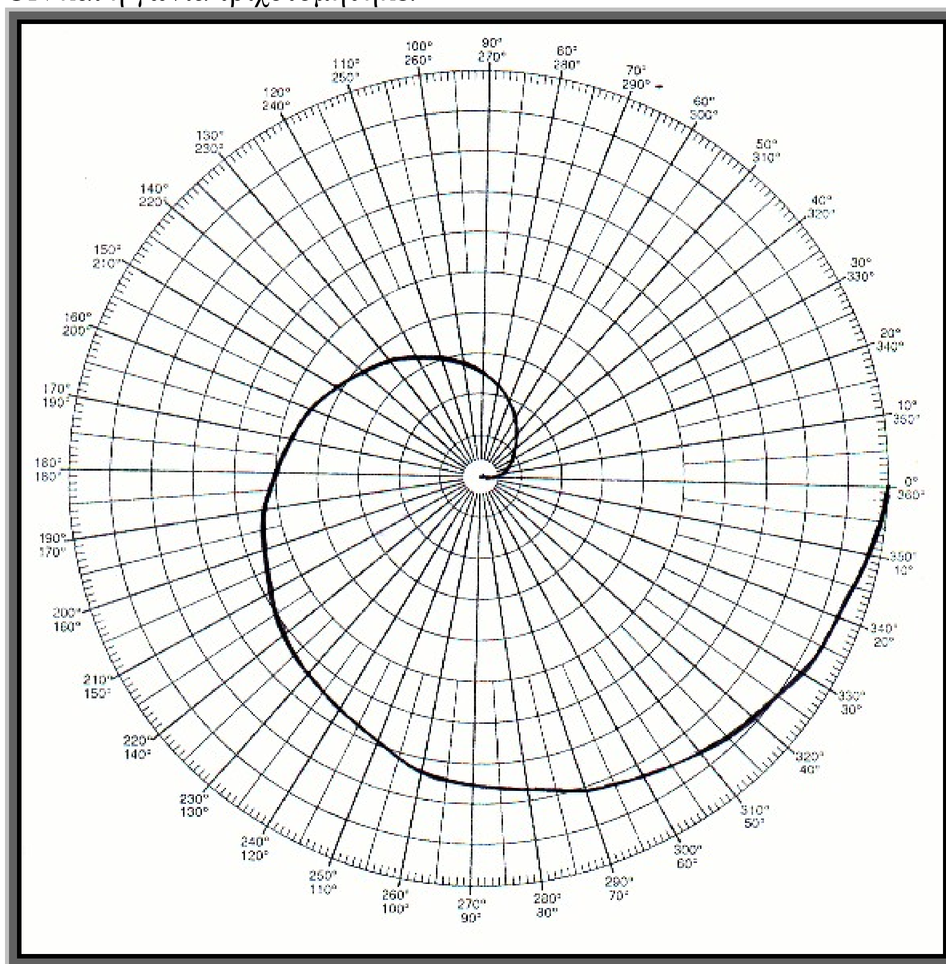
Κατασκευάζω ίσες γωνίες και ομόκεντρους κύκλους των οποίων οι ακτίνες είναι σε τυχούσα αριθμητική πρόοδο με θετική διαφορά .

Με ανάλογο τρόπο όπως και με την τετραγωνίζουσα , την κατασκευάζουμε και εκπληροί την εξίσωση:

ρ= $\frac{R}{2\pi}\theta$, όπου R είναι η ακτίνα του πρώτου κύκλου(που λαμβάνω R=ω , με ω την διαφορά της προόδου)
Από την προηγούμενη με διαίρεση και των δύο μελών με το 3 , έχω:

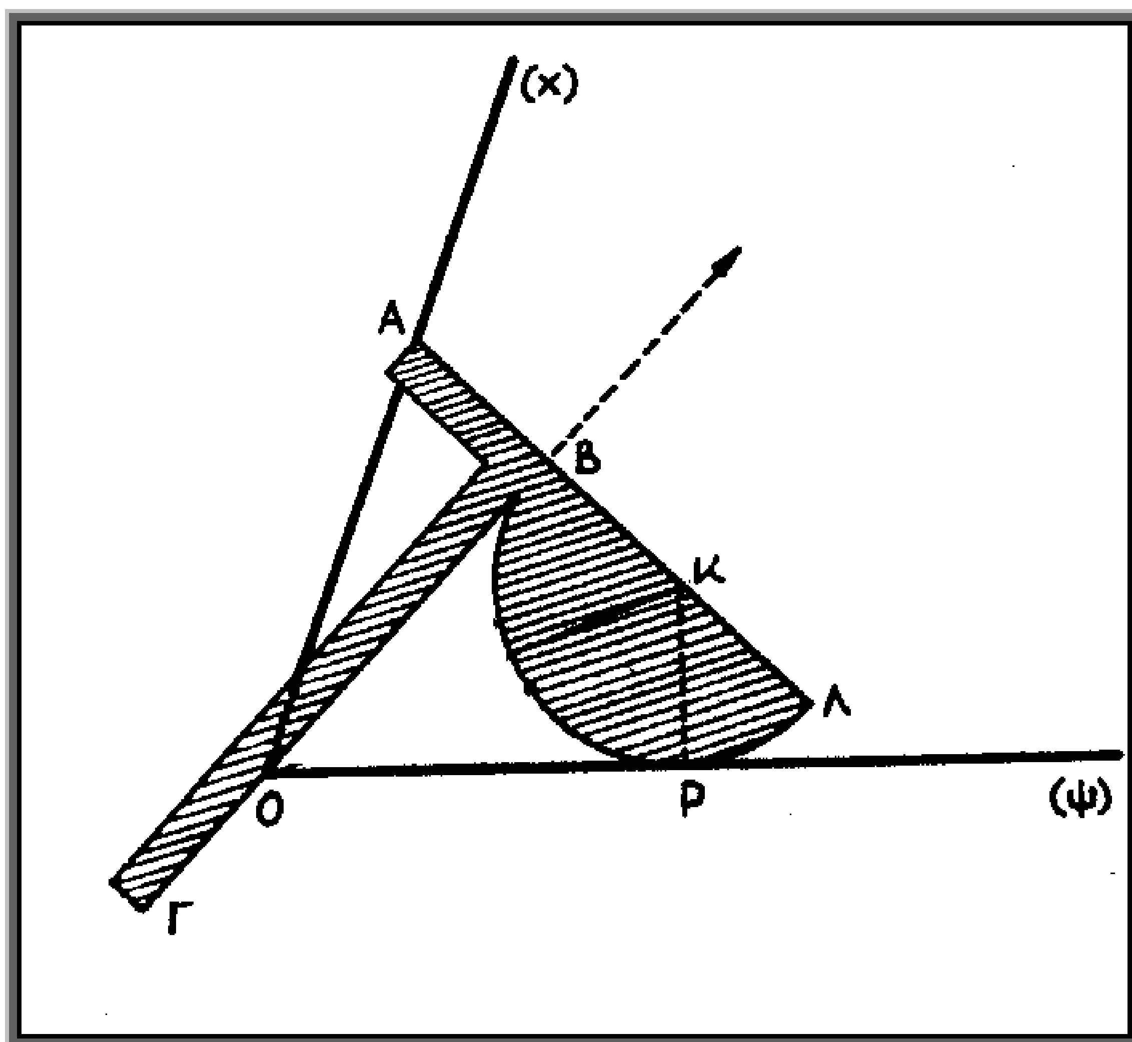
$$\frac{\rho}{3}=\frac{R}{2\pi}\frac{\theta}{3}$$

Δηλαδή το 1/3 της γωνίας θ , αντιστοιχεί στο 1/3 της πολικής ακτίνας ρ της καμπύλης κι αυτό για κάθε στιγμή της κίνησης .
Εάν λοιπόν έχω προς τριχοτόμηση την γωνία χΟΖ=θ . Τότε κάνω το εξής: Τριχοτομώ το ΟΚ και λαμβάνω το τμήμα ΟΛ=1/3 ΟΚ . Με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΛ κατασκευάζω κύκλο , που τέμνει την έλικα σε σημείο Ν . Φέρω την ΟΝ και η γωνία τριχοτομήθηκε.



Εικόνα 11: Η έλιξ του Αρχιμήδη υλοποιημένη όχι για γωνία π/2 όπως πριν , αλλά για 2π.

<u>Άλλα όργανα και κατασκευές για την τριχοτόμιση:</u>
<u>Η κατασκευή του A. Pergassi (1893)</u>

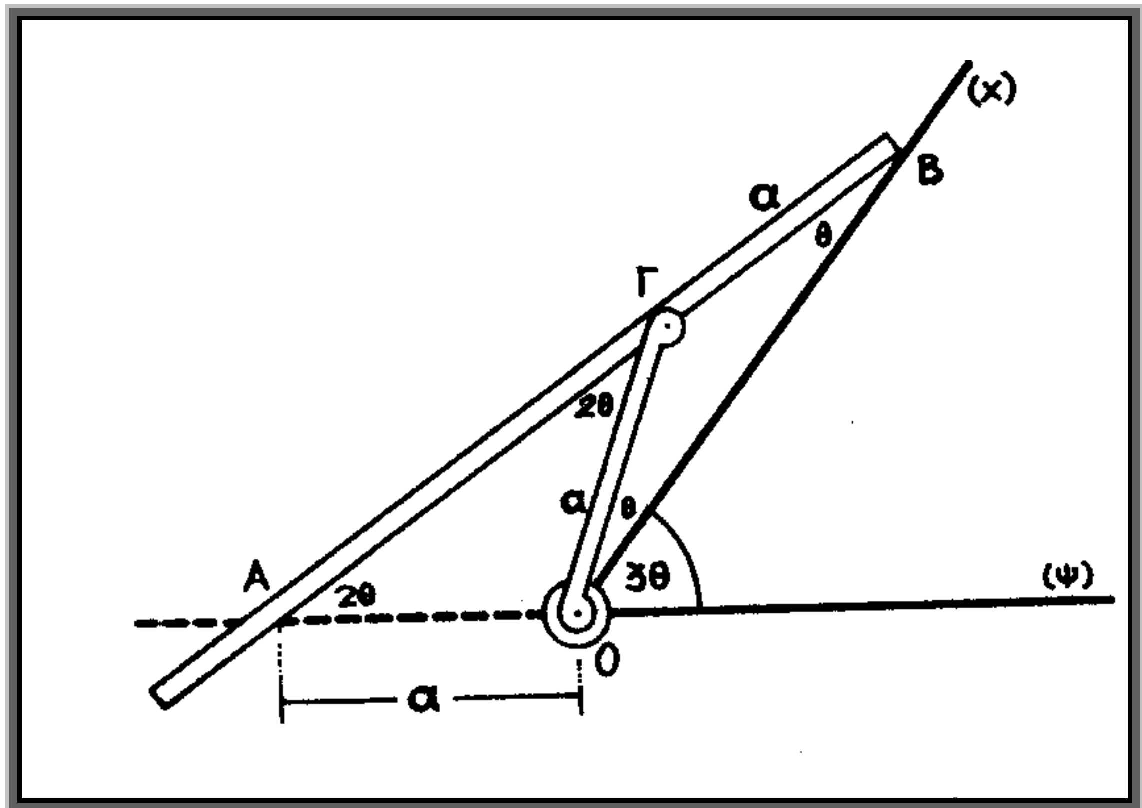


Στο παραπάνω σχήμα –όργανο, έχω το ημικύκλιο με κέντρο Κ , ενώ ισχύει ΑΒ=ΒΚ=ΚΛ

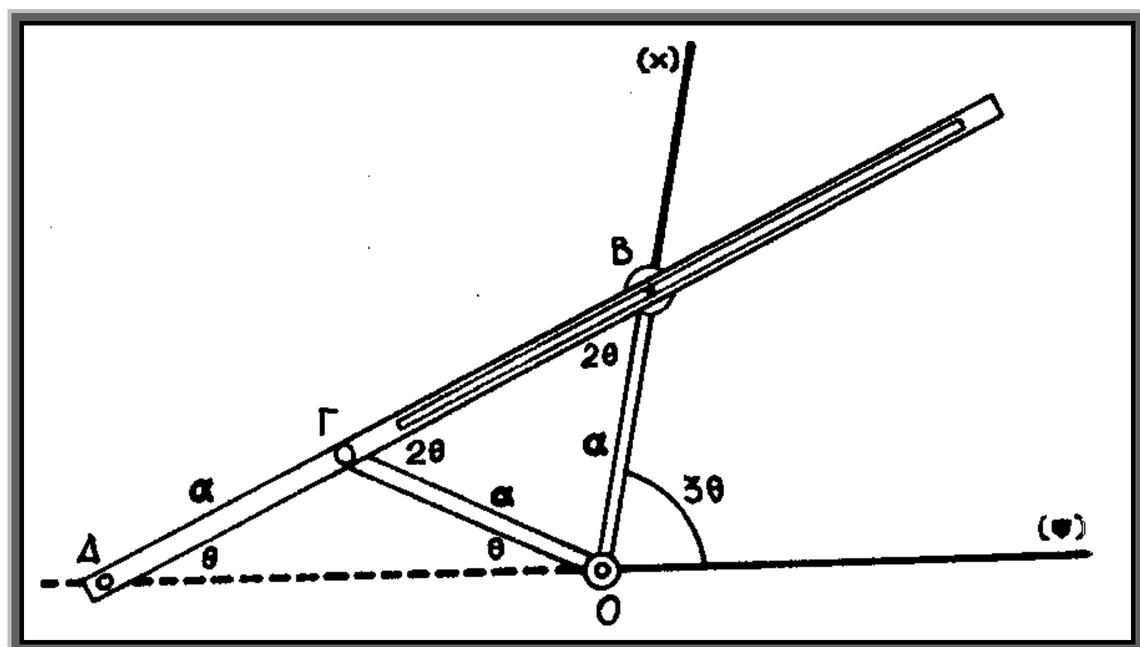
Συνεπώς αν προσαρμόσω την κορυφή Ο της προς τριχοτόμηση γωνίας στην ΓΒ , όπως φαίνεται στο σχήμα το άκρο Α στην μία πλευρά και το άλλο μέρος του οργάνου να εφάπτεται (το ημικύκλιο) στην άλλη πλευρά, , τότε οι γωνίες ΒΟΑ, ΒΟΚ , και ΚΟΡ είναι ίσες μεταξύ τους και η γωνία τριχοτομήθηκε.

Η απόδειξη είναι απλή και μπορεί να γίνει με την σύγκριση των τριών ορθογωνίων τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΚ , ΚΟΛ που είναι μεταξύ τους ίσα , απ' όπου απορρέει το ζητούμενο.

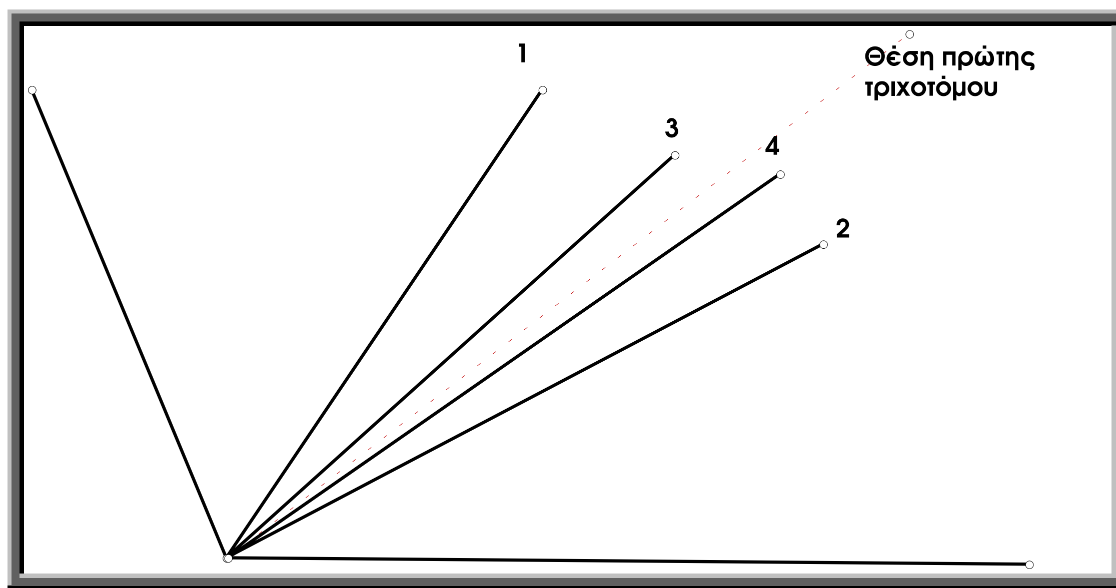
Παραθέτουμε ακόμη και την εικόνα άλλων δύο οργάνων που βασίζονται στην ιδέα του Αρχιμήδη με τα ισοσκελή τρίγωνα (μία από τις λύσεις που έχει δώσει ο μέγιστος αυτός μαθηματικός)



Εικόνα 12: Είναι προφανές ότι η απόδειξη της τριχοτομίας υλοποιείται πάνω στο σχήμα, με βάση την πρόταση ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των δύο εντός κι απέναντι γωνιών.



Εικόνα 13 Και εδώ η ιδέα είναι ίδια με την προηγούμενη , αλλά το όργανο έχει κινητά μέρη και παραπάνω πολυπλοκότητα.



Εικόνα 14: (Eric Kincanon) Εδώ έχουμε τριχοτόμηση με διαδοχικές προσεγγίσεις που βασίζονται στην παρακάτω σειρά :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots =$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\frac{1}{128}\ldots\ldots\ldots\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\right)=$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}=$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}-\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

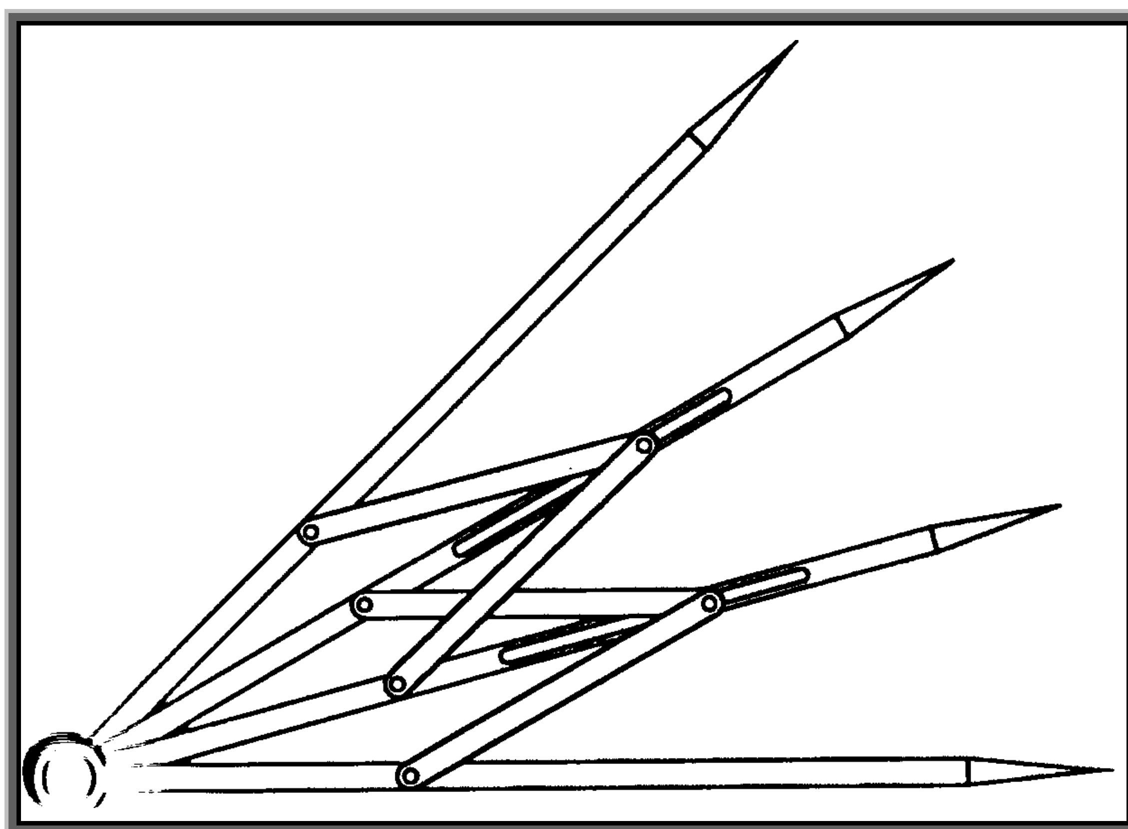
Με άλλο τρόπο η παραπάνω σχέση δίνει το ίδιο αποτέλεσμα ως εξής:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots =$$

$$(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}-\frac{1}{16})+(\frac{1}{32}-\frac{1}{64})+(\frac{1}{128}-.)+()........\,.......=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+..........\,..=\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{\nu}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

Ο Τριχοτόμος του Ισαάκ Ρούφους

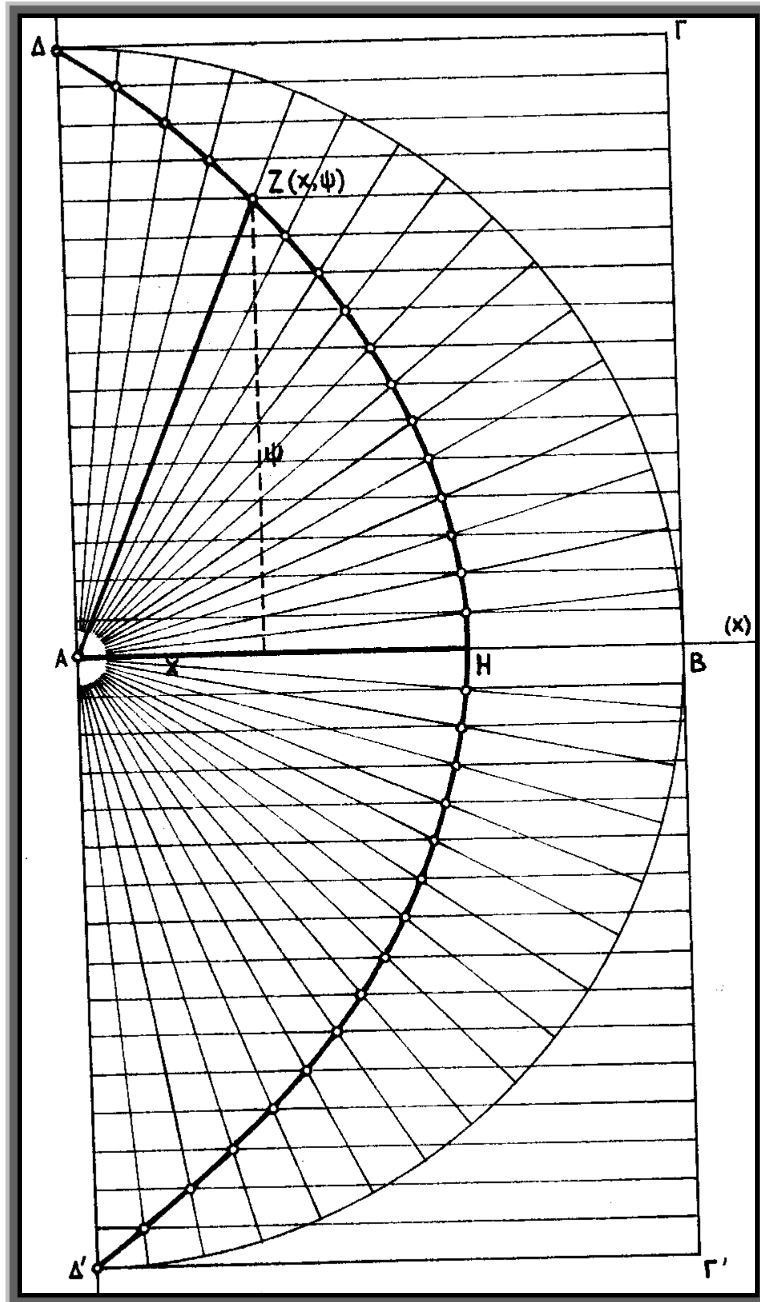


Εικόνα 15: Οι δύο ίσοι ρόμβοι με τα τέσσερα ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα , εξασφαλίζουν την τριχοτόμηση της γωνίας.

<u>Ο Τετραγωνισμός του Κύκλου</u>

Η Καμπύλη του Ιππία του Ηλείου

Αυτήν την είδαμε και πριν , καθώς την καμπύλη αυτή επινόησε η Ιππίας, αλλά είναι και γνωστή ως τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτους, αφού χρησιμοποιείται και για τον τετραγωνισμό του κύκλου όπως προείπαμε. Ένα άλλο σχήμα όπου υλοποιείται σε γωνία π και όχι π/2 όπως προηγουμένως είναι το παρακάτω:



Είναι γνωστό ότι έχουμε καρτεσιανή εξισωση :

$\psi = \frac{2\pi}{\alpha} \text{τοξεφ} \frac{\psi}{\chi}$ όπου α η πλευρά του τετραγώνου.

Η παραπάνω εξίσωση αν επιλυθεί ως προς χ και μετασχηματισθεί κατάλληλα, μπορεί να φθάσει στην παρακάτω μορφή:

$$\chi = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\psi \frac{\pi}{2\alpha}}{\text{εφ} \frac{\pi\psi}{2\alpha}}$$

έτσι , αν πάρω το όριο της παραπάνω συναρτήσεως (αν την δω και έτσι) με ψ→0 , τότε θα έχω:

$$\lim_{\psi\to 0}\chi = \lim_{\psi\to 0}\frac{2\alpha}{\pi}\frac{\psi\frac{\pi}{2\alpha}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi\psi}{2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi\to 0}\chi = \frac{2\alpha}{\pi}\lim_{\psi\to 0}\frac{\psi\frac{\pi}{2\alpha}}{\varepsilon\varphi\frac{\pi\psi}{2\alpha}} \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi\to 0}\chi = \frac{2\alpha}{\pi}\lim_{\psi\to 0}1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi\to 0}\chi = \frac{2\alpha}{\pi}\lim_{\psi\to 0}1 \Rightarrow$$

$$\lim_{\psi\to 0}\chi = \frac{2\alpha}{\pi}$$

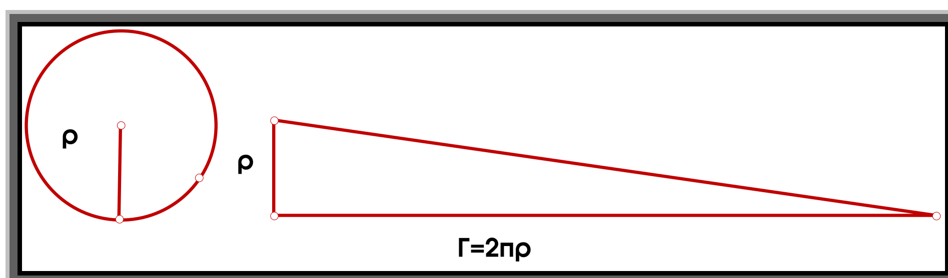
$$(\mathrm{AH}) = \frac{2\alpha}{\pi}$$

Χρησιμοποιήσαμε την σχέση ότι $\lim_{\psi\to 0}\frac{\psi}{\varepsilon\varphi\psi}$

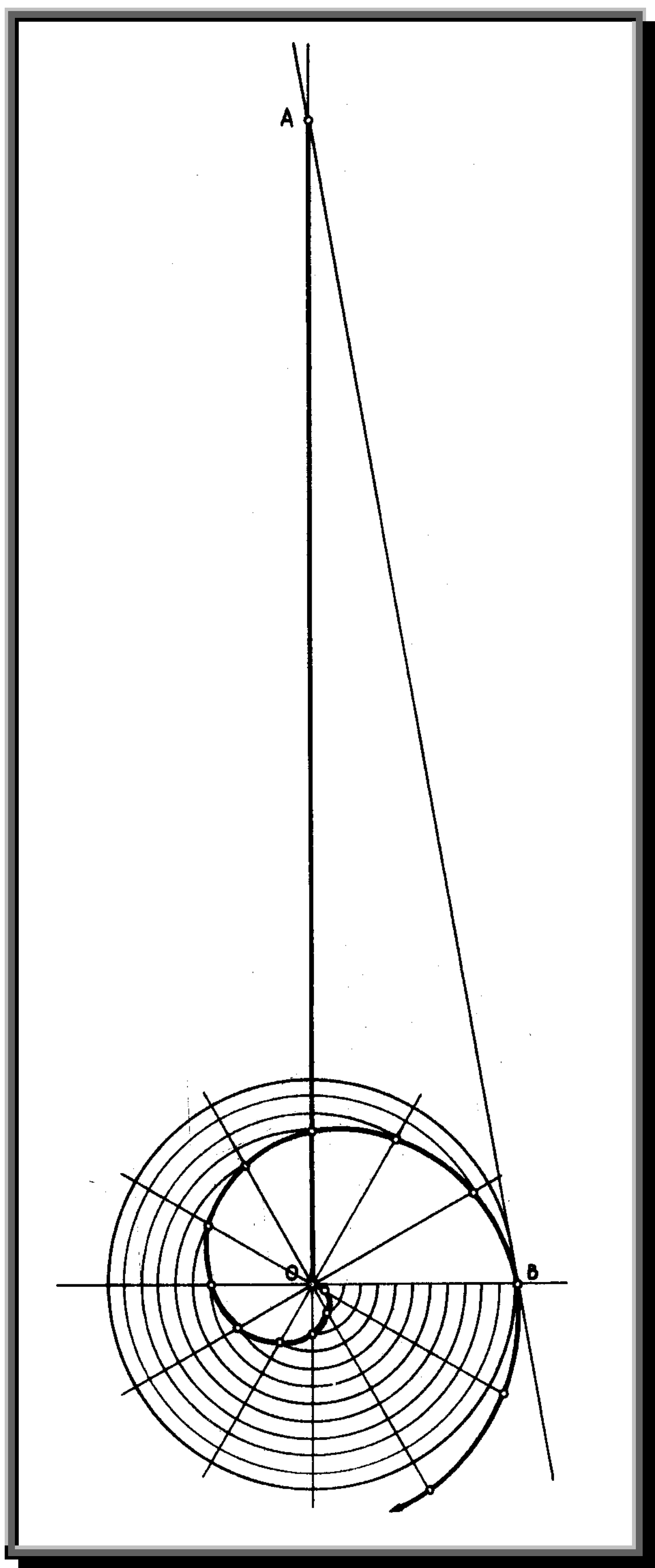
Η τελευταία σχέση μας λέει ότι από την κατασκευή του ΑΗ είναι δυνατή και η κατασκευή του π .

Η προσπάθεια του Αρχιμήδη

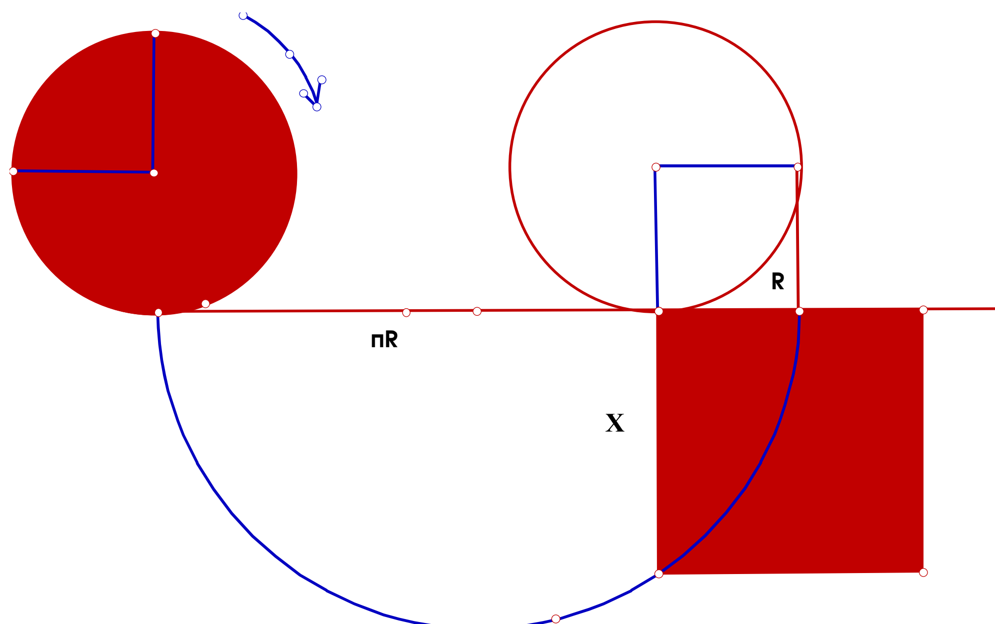
Ο Αρχιμήδης στο μνημειώδες έργο του «Κύκλου μέτρησις» αλλά και στο «περί ελίκων' λέει:
Κάθε κύκλος που η ακτίνα του είναι ίση με μια πλευρά ορθογωνίου τριγώνου και η περιφέρειά του είναι ίση με την άλλη κάθετη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου, έχει εμβαδόν ίσο με το τρίγωνο αυτό.



Στο θεώρημα 18 του βιβλίου του περί ελίκων, αποδεικνύει , ότι :
Αν ευθεία γραμμή εφάπτεται στο πέρας της έλικος που είναι γεγραμμένη για πρώτη φορά, και αν από το σημείο που είναι η αρχή της έλικος αχθεί κάθετος στην αρχή της περιφοράς, τότε αυτή θα συναντήσει την εφαπτομένη και η ευθεία η μεταξύ της εφαπτομένης και της αρχής της έλικος, θα είναι ίση προς την περιφέρειαν του πρώτου κύκλου.
Δηλαδή, αποδεικνύει, ότι η πρώτη περιφέρεια έχει ως ανάπτυγμα το τμήμα ΟΑ .
Έτσι, σε συνδυασμό με το προηγούμενο θεώρημα , το εμβαδόν του κύκλου είναι ίσο προς το τρίγωνο ΟΑΒ , το οποίο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τετράγωνο , κατά τα γνωστά.


A
O
B

Τετραγωνισμός κυλιόμενου κύκλου



Εικόνα 16: Η κύλιση του κύκλου για μισή στροφή , μας δίνει μήκος π R . Στο σχήμα έχω πR R =x^2 από γνωστή ιδιότητα του ύψους ορθογωνίου τριγώνου επί την υποτείνουσα. (Το ορθογώνιο τρίγωνο που είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο και δεν έχει σχεδιασθεί…..

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Η απόδειξη του αδυνάτου της λύσεως των τριών διασήμων προβλημάτων με χρήση θεωρίας αλγευρικών επεκτάσεων

- Θεωρούμε στο επίπεδο ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο Ο(0,0) και Ι(0,1) έχοντας λάβει την μονάδα αυθαίρετα . (Δηλ. το μήκος ΟΙ)
- Δίδεται ένα σύνολο σημείων S του επιπέδου , που περιέχει και τα σημεία Ο και Ι , και το οποίο θα χρησιμοποιηθεί και για την κατασκευή και άλλων σημείων.
- Τα σημεία του S θα τα καλέσουμε **βασικά σημεία**

- Τι σημαίνει ***«κάνω μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη;»***

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: *Όταν λέμε ότι κάνω μια κατασκευή με κανόνα και διαβήτη, κατ΄ουσίαν, εκτελώ μια πεπερασμένη ακολουθία των τριών ακολούθων μορφών:*

1. Χαράζω μια ευθεία γραμμή που ενώνει δύο σημεία , κάθε ένα από τα οποία είναι είτε ένα βασικό σημείο , είτε ένα άλλο που κατασκευάσθηκε προηγουμένως με την ακολουθία των απλών κατασκευών.
2. Χαράσσω κύκλο με κέντρο βασικό σημείο ή ένα σημείο που κατασκευάσθηκε προηγουμένως με την ακολουθία των βασικών κατασκευών και με ακτίνα , ίση με την απόσταση δύο σημείων, κάθε ένα από τα οποία είναι είτε βασικό σημείο, είτε κατασκευάσθηκε από μια ακολουθία απλών κατασκευών.
3. Σημειώνω τομή δύο ευθειών ή τομή δύο κύκλων ή τομή ευθείας και κύκλου.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι όταν εκτελώ κατασκευές όπως η 3) *λαμβάνω και νέα σημεία που δεν είχα προηγουμένως*.

- Ένα σημείο που παίρνω από στοιχειώδεις κατασκευές σημείων του S , λέγεται **κατασκευάσιμο** από το S .
- Το S περιέχει πάντα τα σημεία O και I .
- Ένας πραγματικός αριθμός α θα λέγεται **κατασκευάσιμος από το S** , αν το σημείο (α,0) είναι κατασκευάσιμο από το S .

Μπορούν να αποδειχθούν εύκολα τα εξής:

i) Αν α, β πραγματικοί, και κατασκευάσιμοι από το S , τότε και το σημείο (α,β) είναι κατασκευάσιμο από το S και αντιστρόφως.
ii) Αν α, β κατασκευάσιμοι πραγματικοί αριθμοί , τότε και α+β, α-β, αβ , 1/α , 1/β , β/α $(\alpha \neq 0)$ κατασκευάσιμοι.

Με αυτόν τον τρόπο, βλέπουμε, ότι επειδή τα σημεία (0,0) και (1,0) είναι βασικά σημεία, **κάθε ρητός είναι κατασκευάσιμος**.

- Q(S) , είναι το σώμα που προκύπτει από το σώμα Q , αν του προσαρτήσουμε κι όλες τις συντεταγμένες των σημείων του S .

ΔΗΛΑΔΗ: Το Q(S) αποτελείται από πραγματικούς αριθμούς κατασκευάσιμους από το S .

Ορισμός1: Έστω F σώμα με $Q \subseteq F \subseteq R$ $Q \subseteq F \subseteq R$. Ένα σημείο με συντεταγμένες μέσα από το F θα το καλέσουμε **F-σημείο**.
Ορισμός 2: Μια ευθεία της οποίας η εξίσωση μπορεί να πάρει την μορφή αχ+βψ+γ=0 με α, β, γ, στο F , θα κληθεί **F-ευθεία.**
Ορισμός 3: ένας κύκλος με εξίσωση $\chi^2+\psi^2+\alpha\gamma+\beta\psi+\gamma=0$ με α,β,γ, στο F , θα καλείται **F- κύκλος.**

Ισχύει το παρακάτω λήμμα:
ΛΗΜΜΑ: (i) Η ευθεία που διέρχεται από δύο F-σημεία είναι F-ευθεία.
(ii) Η τομή δύο F- ευθειών, όταν υπάρχει , είναι ένα F-σημείο.
(iii) Τα κοινά σημεία δύο F-κύκλων ή μιας F- ευθείας και ενός F-κύκλου, όταν υπάρχουν , είναι F΄σημεία , όπου είτε F΄=F , είτε [F':F]=2 (:=Η διάσταση του δ.χ. F' επί του F)

Ορισμός: Αν Σ=Q(S) , το σώμα που προκύπτει από την προσάρτηση όλων των συντεταγμένων των σημείων του S στο σώμα Q . P(α,β) είναι ένα τυχόν σημείο

του επιπέδου. Συμβολίζω με Σ(P) το σώμα που παίρνω αν προσαρτήσω τις συντεταγμένες του P , στο Σ . Δηλαδή , Σ(P)=Σ(α,β) .

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Βασικό) Αν το σημείο P είναι κατασκευάσιμο από το S , τότε [Σ(P):Σ]=2^{ν}.

<u>Πώς εφαρμόζονται τα προηγούμενα στον διπλασιασμό του κύβου, στην τριχοτόμηση της γωνίας και στον τετραγωνισμό του κύκλου;</u>

ΔΙΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΥΒΟΥ: Αν λάβουμε την ακμή του κύβου ίση με την μονάδα, τότε, το σύνολο S , θα αποτελείται από το O και I , οπότε από Σ=Q .
Η πλευρά α του διπλασίου κύβου , θα πρέπει να πληροί την εξίσωση $α^3=2$.
Επομένως, είναι ρίζα του πολυωνύμου $χ^3-2=0$. Αλλά , το πολυώνυμο αυτό είναι ανάγωγο. (Εφαρμόζω λ.χ. το κριτήριο του Einsestein για p=2καθώς , $p \nmid 1$, $p \nmid 2^2$)
Έτσι, ο βαθμός του α επί του Q είναι 3 , δηλ [Q(α):Q]=3.
Εάν λοιπόν P είναι το σημείο (α,0) τότε Q(P)=Q(α) .
Όμως σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα , επειδή το 3 δεν είναι δύναμη του 2 , το P και άρα και το α , δεν είναι κατασακευάσιμο.
Επομένως έχω το αδύνατο της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη.
ΤΡΙΧΟΤΟΜΗΣΗ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ: Μια γωνία είναι κατασκευάσιμη απ΄ το S , αν και μόνο αν , το συνθ είναι κατασκευάσιμο. Επομένως , δοθέντος του συνθ , να κατασκευασθεί το συν(θ/3).
Γνωρίζουμε την τριγωνομετρική ταυτότητα $4συν^3(θ/3)-3συν(θ/3)=συνθ$.
Άρα το συν(θ/3) είναι ρίζα του πολυωνύμου $4χ^3-3χ-r=0$, όπου r=συνθ.
Εδώ έχομε ότι Σ=Q(S) =Q(r)
Επομένως εξαρτάται από το r για το αν και κατά πόσον το ανωτέρω πολυώνυμο είναι ανάγωγο. Αν θ =60^o συνθ=1/2 και το πολυώνυνο (με απαλοιφή παρωνομαστών δίνει το ισοδύναμο) $8χ^3-6χ-1$ που είναι ανάγωγο (Με το κριτήριο του Einsestein για p=3)
Επί παραδείγματι, για θ=90^o , συνθ=0 , r=0 , και το πολυώνυμο $4χ^3-3χ$, δεν είναι ανάγωγο , διότι παραγοντοποιείται με ρητούς συντελεστές ,ως $χ(4χ^2-3)$.
επομένως, η ορθή τριχοτομείται.
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ:
Αν πάρουμε την ακτίνα του κύκλου ίση με 1 ,τότε θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα τετράγωνο με πλευρά $\sqrt{\pi}$.
Αν το $\sqrt{\pi}$ ήταν κατασκευάσιμο, τότε θα έπρεπε το σώμα Q($\sqrt{\pi}$) να είναι αλγεβρική επέκταση του Q . Τότε όμως, [Q($\sqrt{\pi}$):Q] =2^{ν} . Έτσι όμως, το π θα ήταν ρίζα πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές. Ατοπο, διότι ο π είναι υπερβατικός , όπως ο Lidenmann to 1882 απέδειξε.
(Βλέπε και εργασία στο διαδύκτυο των Ι. Πλατάρου –Γ. Λατίφη-Β. Κατωπόδη «Η υπερβατικότητα των e και π»
http://www.mathematics.gr/ **(ΕΡΓΑΣΙΕΣ)**

<u>Βιβλιογραφία:</u>

1. ***«Η Γεωμετρία και οι εργάτες της στην Αρχαία Ελλάδα»……*** *Δημήτριου Τσιμπουράκη -ΑΘΗΝΑ 1985*
2. ***«Τα περίφημα άλυτα Γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας»****…..Μαυρικίου Α. Μπρίκα –ΑΘΗΝΑ 1970*
3. ***Στοιχεία από τη μη διαφορική Γεωμετρία στα πλαίσια μιας χρονικά περιορισμένης επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών Μαθηματικών. Επιλογή από νεώτερες εξελίξεις με ιστορικές νύξεις»*** *…Χρόνης Στράτζαλος ΑΘΗΝΑ 1999*
4. ***«Αποδείξεις χωρίς λόγια»*** *….Roger B. Nelsen Εκδόσεις Σαββάλας ΑΘΗΝΑ 1996*
5. ***«Στοιχεία της ευκλείδειας Γεωμετρίας*** *από την αποψη του Κλάϊν – εφαρμογές στην Φυσική» Σ. Ελευθερίου –Π. Λόης ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣΑΘΗΜΑ 1998*
6. ***Θεωρία Galois*** *Στυλιανού Ανδρεαδάκη*

Διαδύκτυο

http://mathematics.gr ***ΕΡΓΑΣΙΕΣ «Η υπερβατικότητα των αριθμών e και π»***